Subject:
Year. Month. Date. ( )

أعداد مختلطة : عدد مختلط $Z = (x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}$

قسمت حقيقي $x = Re(z)$

قسمت موهومي $y = Im(z)$

$(x, 0) = x$ عدد حقيقي

عدد موهومي محض $(0, y) \neq y$

مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C} = \{z, z = (x, y)\}$ complex

ضرب : $z_1 = (x_1, y_1) , z_2 = (x_2, y_2)$

تعريف : $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 , x_1 y_2 + y_1 x_2)$

جمع : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

تعريف : $(0, 1) = i$

$Z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) y$
$= x + i y \quad x, y \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C} = \{ z = x + iy , x, y \in \mathbb{R} \}$

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1$

$i^3 = i \cdot i^2 = -i$

$i^{77} = i^{76} \cdot i = \underbrace{(i^2)^{38}}_{1} \cdot i = i$

$i^4 = \underbrace{i^2}_{-1} \cdot \underbrace{i^2}_{-1} = +1$

$i^{90} = (i^2)^{45} = -1$

$i^5 = \underbrace{i^4}_{1} \cdot i = i$

$i^{91} = i^{90} \times i = -i$

$* \frac{1}{i} \quad * \frac{i}{i} = -i$ $\quad * \frac{1}{i} = -i$

تساوی: $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$

$z_1 = z_2 \iff (x_1 = x_2 \;,\; y_1 = y_2)$

مثال: جواب معادله را بیابید: $x^2 + (2x - y)i = 2 - \sqrt{2}\, i$

$\Rightarrow x^2 = 2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

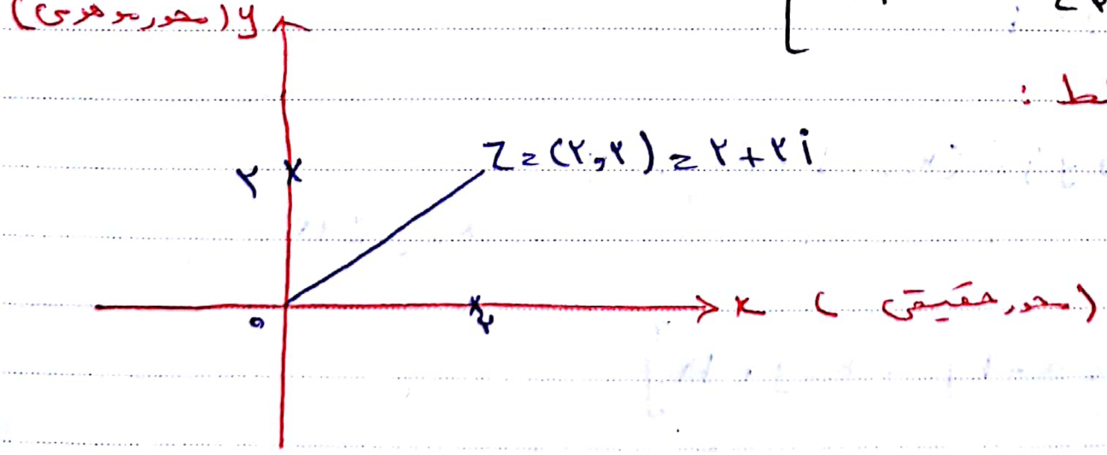
و

$2x - y = -\sqrt{2} \longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = \begin{cases} 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$

$z_1 = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}\, i$

$z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

صفحه مختلط:



فرم قطبی عدد مختلط:

$z=(x,y)=x+iy$

طول بردار $\vec{OZ}$: $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\arg z : \theta$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$z=x+iy$

زاویه‌ای است بین جهت مثبت محور Z و بردار $\vec{OZ}$

زاویه‌ی مثبت: حرکت از خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت

فرم قطبی: $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\begin{cases} \theta=tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ r=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi$

آن مقدار از زاویه‌ی θ که در بازه‌ی $(-\pi,\pi]$ قرار دارد آرگومان اصلی نامیده،

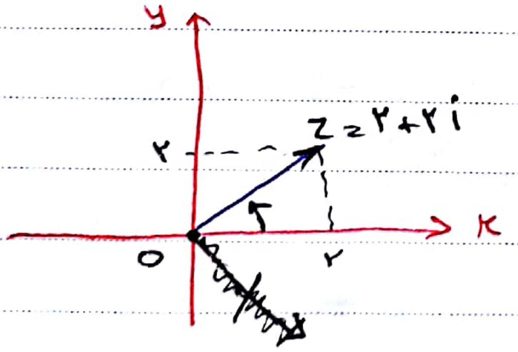
با $\operatorname{Arg} z$ نشان می‌دهیم.

مثال) فرم قطبی عدد $z=2+2i$ را بنویسید.

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\operatorname{Arg} z : \theta$

$\underset{\arg z}{\theta}=tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)=\tan^{-1}(1)=+\frac{\pi}{4}+2k\pi$



$z=r\cos\theta+ir\sin\theta$

$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

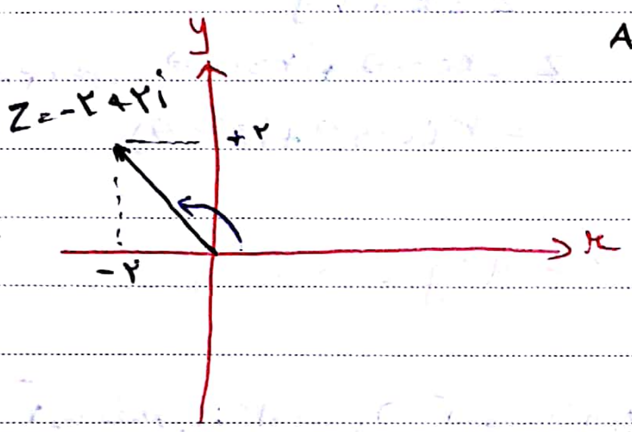
Scanned by CamScanner

مثال) فرم قطبی $Z=-2+2i$ را بنویسید.

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}(-1)=+\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi \quad k\in Z$

$Arg\,Z=\frac{3\pi}{4}$



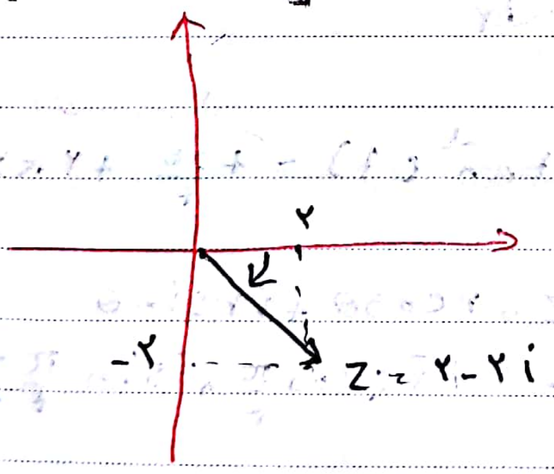
$Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

مثال) فرم قطبی عدد $Z=2-2i$ را بنویسید.

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\underset{\arg z}{\theta}=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-2}{2}\right)=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$Z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

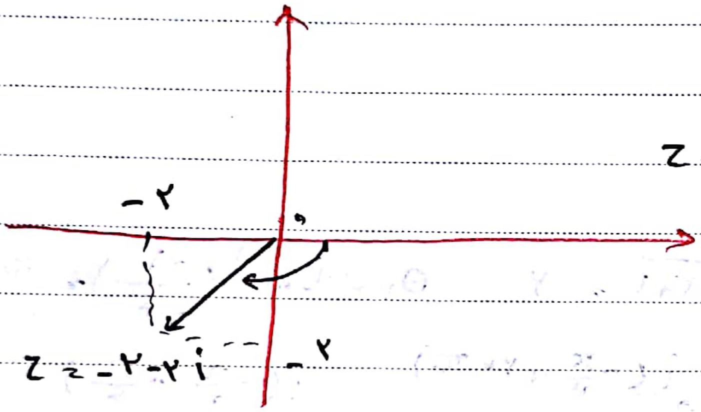


Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) فرم قطبی $Z=-۲-۲i$ را بنویسید.

$$r=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}(+1)=\underbrace{-\frac{۳\pi}{۴}}_{Arg\,z}+۲k\pi$$



$$z=۲\sqrt{۲}\left(\cos\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right)+i\sin\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right)\right)$$

فرمول اویلر:

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

$$Z=(x,y)$$
$$=x+iy$$
$$r(\underbrace{\cos\theta+i\sin\theta}_{i\theta})$$
$$=re$$

ضرب:

$$Z_1=x_1+iy_1\longrightarrow r_1e^{i(\theta_1+۲k\pi)}$$

$$Z_۲=x_۲+iy_۲\longrightarrow r_۲e^{i(\theta_۲+۲k\pi)}$$

$$Z_1\cdot Z_۲=r_1r_۲e^{i(\theta_1+\theta_۲+۴k\pi)}$$

تقسیم:

$$\frac{Z_1}{Z_۲}=\frac{r_1e^{i(\theta_1+۲k\pi)}}{r_۲e^{i(\theta_۲+۲k\pi)}}=\frac{r_1}{r_۲}e^{i(\theta_1-\theta_۲)}$$

PAPCO

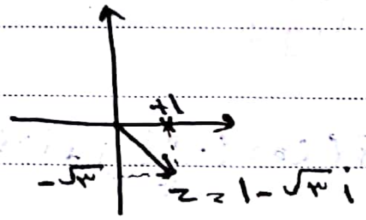
Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

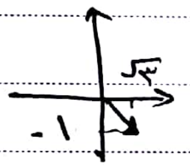
مثال: اگر $z_1 = 1-\sqrt{3}i$ و $z_2 = \sqrt{3}-i$ مطلوب است $\frac{z_1}{z_2}$.

راه ۱: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i-3i+\sqrt{3}}{3+1} = \frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}i$

راه ۲: $z_1 = 1-\sqrt{3}i$ ، $r_1 = \sqrt{1+3} = 2$ ، $\theta_1 = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$



$z_2 = \sqrt{3} - i \qquad r_2 = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i(-\frac{\pi}{3}+2k\pi)}}{2e^{i(-\frac{\pi}{6}+2k\pi)}} = e^{i(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})}$$

$$= e^{i(-\frac{\pi}{6})} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

توان: z^n

$$z = x+iy = re^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$z^n = r^n e^{in(\theta+2k\pi)}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$n=2: (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$$

$\Rightarrow$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ و $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

P4PCO

Scanned by CamScanner

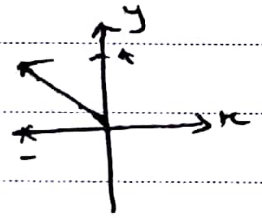
Subject:
Year. Month. Date. ( )

(تمرین) * با $n=3$ ، $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را بر حسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بدست آورید.

(مثال) $(-2\sqrt{3}+2i)^{18}=?$

$z=-2\sqrt{3}+2i \qquad r=\sqrt{12+4}=4$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right)=\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\pi-\frac{\pi}{6}}+2k\pi$ (Arg z)



$z=re^{i\theta}=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z^{18}=\left(4e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^{18}=4^{18}\cdot e^{18\times\frac{5\pi i}{6}}=4^{18}\times e^{15\pi i}$

$=4^{18}\left(\underbrace{\cos(15\pi)}_{-1}+i\underbrace{\sin(15\pi)}_{0}\right)=-4^{18}$

ریشه‌ی n ام اعداد مختلط z : $z^{\frac{1}{n}}$

هر عدد مختلط n ریشه‌ی n ام دارد که همه‌ی آن‌ها روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ واقعند.

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$Z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$

$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad k=0,1,2,\dots,n-1$

مثال: ریشه‌های سوم $8i$ ؟

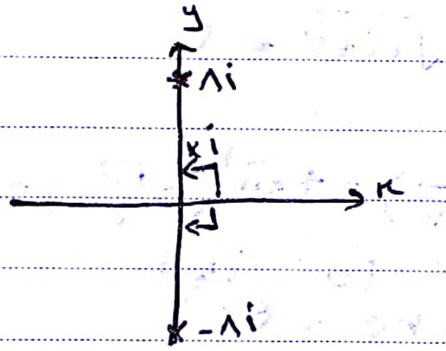
$n-1$

$K = 2, 1, 0 = 3-1$

$Z = 8i = 0 + 8i \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} = 8$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{0}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$(8i)^{\frac{1}{3}} = ?$



$Z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2$

$(8i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2$

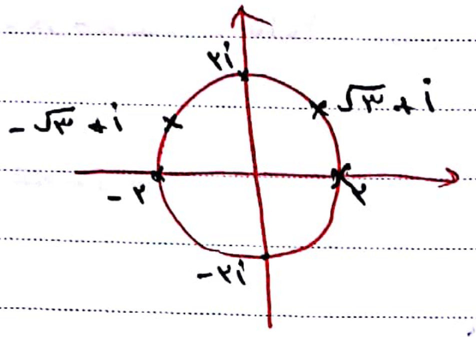
$k=0 \rightarrow w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$k=1 \rightarrow w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

$k=2 \rightarrow w_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 - i) = -2i$

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال) ریشه‌های دوم هر عدد مختلط قرینه یکدیگرند :

$$Z = re^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$Z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) \quad , k=0,1$$

$$k=0 : w_0 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$k=1 : w_1 = r^{\frac{1}{2}}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}_{-\cos\frac{\theta}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}_{-\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= -r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

مزدوج :

$$Z = x+iy \Rightarrow \bar{Z} = x-iy$$

$$|\bar{Z}| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |Z|$$

$$Z\cdot\bar{Z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2+y^2 = |Z|^2$$

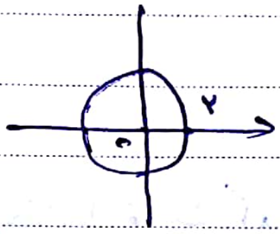
* $Z+\bar{Z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}(Z)$ * $Z-\bar{Z} = 2iy = 2\,\mathrm{Im}(Z)$

ناحیه در صفحه مختلط:

$|z|=2$

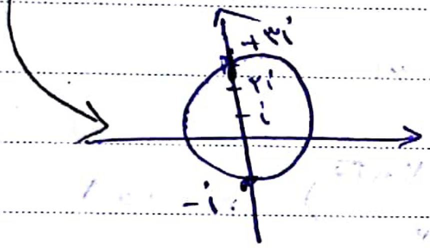
$\sqrt{x^2+y^2}=2$

$x^2+y^2=4$ دایره به مرکز مبدا و شعاع ۲



$|z-0|=2$

$|z-i|=2$ دایره به مرکز i و شعاع ۲



$|z-i|=2$

$|x+iy-i|=2$

$|x+i(y-1)|=2$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$

$x^2+(y-1)^2=4$: دایره‌ای به مرکز $(0,1)$ و شعاع ۲

$0+i$

$|z|=1$ دایره‌ی واحد

$|z|<1$ داخل دایره واحد

$|z|>1$ خارج دایره واحد

Subject
Date

توابع مختلط: $\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط

فرض کنیم $S \subseteq \mathbb{C}$

تابع مختلط $f : S \to \mathbb{C}$

$$f(z) = w = \underbrace{u(x,y)}_{\text{قسمت حقیقی}} + i \underbrace{v(x,y)}_{\text{قسمت موهومی}}, \quad z = x+iy$$

$u(x,y) = Re(f(z))$

$v(x,y) = Im(f(z))$

مثال) قسمت های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = z^2 + 2\bar{z}$ را مشخص کنید.

$$f(z) = (x+iy)^2 + 2(x-iy)$$
$$= x^2 - y^2 + 2ixy + 2x - 2iy$$
$$= \underbrace{x^2 - y^2 + 2x}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2xy - y)}_{v(x,y)}$$

مثال) قسمت های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = \sqrt{z}$ ؟

$$z = x+iy \to re^{i(\theta + 2k\pi)}$$

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) \quad k=0,1$$

$$k=0 : f_1(z) = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$k=1 : f_2(z) = \sqrt{r}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}_{-\cos\frac{\theta}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}_{-\sin\frac{\theta}{2}}\right) = -f_1(z)$$

PAPCO

تابع $f(z) = \sqrt{z}$ دو مقداره است.

Scanned by CamScanner

مثال) مقدار تابع $f(z)=3z+i\bar{z}$ را در $z=2-i$ محاسبه کنید.

$$f(2-i)=3(2-i)+i(2+i)$$
$$=6-3i+2i-1$$
$$=5-i$$

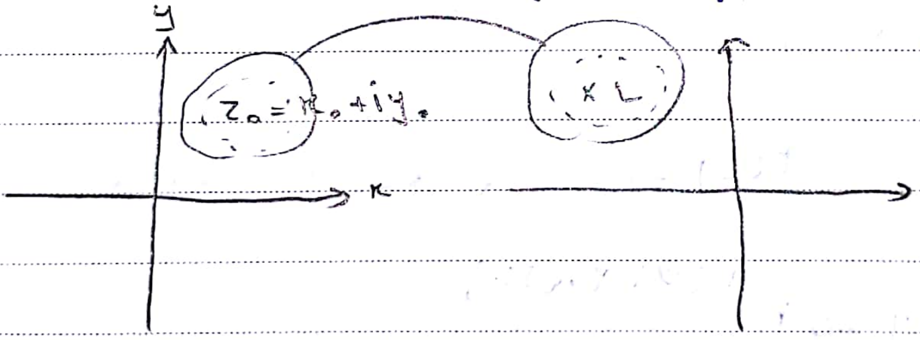
تابع چند جمله ای: $f_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n$

$$\forall i \quad a_i\in\mathbb{C}$$

حد تابع مختلط:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=L$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall z\,(|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-L|<\varepsilon)$$



نتیجه: برای عدم وجود حد در نقطه ی z_0:

اگر در دو مسیر متفاوت که به نقطه ی ثابت z_0 نزدیک می شویم دو مقدار متفاوت برای تابع $f(z)$ به دست می آوریم، گوییم حد تابع در نقطه ی z_0 وجود ندارد.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) آیا $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ وجود دارد؟

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy}$$

در امتداد محور x : $y=0$: $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x} = \lim 1 = 1$

در امتداد محور y : $x=0$: $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{iy}{-iy} = \lim(-1) = 1$

$\Rightarrow$ (پس در $z=0$ حد وجود ندارد)

پیوستگی: تابع $f(z)$ را در نقطه‌ی z_0 پیوسته گوییم هرگاه:

۱) تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تعریف شده باشد.

۲) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ وجود داشته باشد.

۳) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

مثال) نقاط ناپیوستگی تابع $f(z) = \frac{z-2i}{z^2+1}$ ؟

$z^2+1=0 \longrightarrow z^2=-1 \Rightarrow z=\pm i$ ← شرط اول را ندارد نقاط ناپیوستگی

تابع در این نقاط تعریف نشده

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) نقاط ناپیوستگی $f(z)=\frac{z-2i}{z^2+4}$ ؟

$$=\frac{z-2i}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{1}{z+2i}$$ نقاط ناپیوستگی $z=-2i$

مثال) نقاط ناپیوستگی تابع $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$ ؟

دیدیم که $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}$ وجود ندارد پس در $z=0$ تابع ناپیوسته است.

شرط دوم را ندارد.

مشتق پذیری: تابع $f(z)$ را مشتق پذیر گوییم هرگاه حد زیر

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$ وجود داشته باشد.

در صورت وجود حد آن را با $f'(z)$ نشان می دهیم.

مثال) آیا تابع $f(z)=z^2$ مشتق پذیر است؟

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^2+(\Delta z)^2+2z\Delta z-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\Delta z+2z)\Delta z}{\Delta z}=2z:f'(z)$$

مثال) آیا تابع $f(z)=\bar{z}$ مشتق پذیر است؟

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\bar{z}+\overline{\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\Rightarrow\begin{cases}-1 & \text{در مسیر } \Delta x=0\\ +1 & \text{در مسیر } \Delta y=0\end{cases}$$

پس حد وجود ندارد در نتیجه تابع $f(z)=\bar{z}$ مشتق پذیر نیست.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تابع تحلیلی: تابع $f(z)$ را در ناحیه D تحلیلی گوییم هرگاه در تمام نقاط ناحیه مشتق پذیر باشد: تابع $f(z)$ را در نقطه‌ی z_0 تحلیلی گوییم هرگاه در نقطه‌ی z_0 و نیز در یک همسایگی از نقطه‌ی z_0 مشتق پذیر باشد.

معادلات کوشی - ریمان:

فرض کنیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$، معادلات کوشی ریمان عبارتند از:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

قضیه: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در یک ناحیه (یا در نقطه‌ی z_0) مشتق پذیر باشد آنگاه معادلات کوشی - ریمان در آن ناحیه (یا در z_0) برقرار است.

$$f(z)=u+iv \text{ مشتق پذیر باشد} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \\ , \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

نتیجه:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Leftarrow$ $f(z)=u+iv$ مشتق پذیر نیست.

(اگر در یک نقطه معادلات کوشی - ریمان برقرار نباشند آنگاه تابع در آن نقطه مشتق پذیر نیست.)

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) آیا تابع $f(z)=\bar{z}^2$ مشتق پذیر است؟

$$f(z)=\bar{z}^2=(x-iy)^2=x^2-y^2-2ixy$$

$u(x,y)=x^2-y^2 \quad v(x,y)=-2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2x$ مگر در $x=0$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-2y$ مگر در $y=0$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$

پس معادلات کوشی - ریمان در هیچ جا به غیراز نقطه $(0,0)$ برقرار نیستند

درنتیجه تابع $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای به غیراز $(0,0)$ مشتق پذیر نیست

مشتق پذیری در $(0,0)$ را هنوز نمی دانیم

تحلیلی: چون تابع در هیچ همسایگی از $(0,0)$ مشتق پذیر نیست

پس در $(0,0)$ تحلیلی نیست.

مثال) آیا تابع $f(z)=z.\bar{z}$ تحلیلی است؟

$f(z)=z.\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$

$f(z)=x^2+y^2+0i$

$u(x,y)=x^2+y^2 \quad v(x,y)=0$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$ مگر در $x=0$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0$ مگر در $y=0$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$

PAPCO

پس تابع $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای به غیراز $(0,0)$ مشتق پذیر نیست

برای $(0,0)$: چون در هیچ همسایگی از $(0,0)$ مشتق پذیر نیست پس در $(0,0)$ تحلیلی نیست

Scanned by CamScanner

Subject
Date

در نتیجه تابع $f(z)$ در هیچ نقطه‌ی مختلطی تحلیلی نیست.

قضیه: فرض کنیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$، اگر معادلات کوشی-ریمان برقرار باشند و به علاوه‌ی (مشتقات جزئی $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ توابع پیوسته باشند.) آنگاه تابع $f(z)$ مشتق پذیر است.

مثال) نشان دهید تابع $f(z)=z^3$ تحلیلی است.

$$f(z)=z^3=(x+iy)^3=x^3+i^3y^3+3x^2iy+3xi^2y^2$$
$$=x^3-iy^3+3ix^2y-3xy^2$$
$$=\underbrace{(x^3-3xy^2)}_{u(x,y)}+i\underbrace{(3x^2y-y^3)}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2 \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=+6xy : \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \checkmark$$

معادلات کوشی-ریمان برقرارند و همچنین توابع $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$، $\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy$، $\frac{\partial v}{\partial x}=6xy$ و $\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$ همه جا پیوسته هستند.

پس تابع در تمام نقاط مشتق پذیر بوده و یا تحلیلی است.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

* اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

از مثال قبل دیدیم که $f(z)=z^3$ تحلیلی است پس :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=3x^2-3y^2+i(6xy)$$

$$=3(x^2-y^2+2ixy)$$

$$=3(x+iy)^2=3z^2$$

مثال) تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را طوری تعیین کنید که قسمت حقیقی آن $u(x,y)=\sin x.\sinh y$ باشد ، سپس $f'(z)$ را بدست آورید .

چون تابع $f(z)$ تحلیلی است پس معادلات کوشی - ریمان برقرارند :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\longrightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\sinh y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\longrightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=-(\sin x.\cosh y)$$

$$\Rightarrow v(x,y)=\int\cos x.\sinh y\,dy+g(x)$$

$$v(x,y)=\cos x.\cosh y+g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x.\cosh y+g'(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-(\sin x.\cosh y)$$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow g(x)=c$$

PAPCO

Subject
Date

$f(z) = \sin x . \sinh y + i(\cos x . \cosh y + c)$: پس

$f'(z) = u_x + i v_x$

$= \cos x \sinh y + i(-\sin x . \cosh y)$

$f'(i) = ? \Rightarrow f'(0+1i) = \underbrace{\cos 0}_{1} \sinh 1 + i(-\sin 0 \cosh 1)$ ($\sin 0 \to 0$)

$= \sinh 1$

معادلات کوشی-ریمان در مختصات قطبی:

$f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} . \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} . \frac{\partial \theta}{\partial x}$ $\quad (\tan^{-1} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$= u_r . \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + u_\theta . \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$ $= \frac{\frac{-y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$

$= u_r . \frac{r\cos\theta}{r} + u_\theta \frac{-r\sin\theta}{r^2}$

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = u_r . \cos\theta - u_\theta . \frac{1}{r} \sin\theta$

Subject

Date

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$=v_r\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+v_\theta\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$=v_r\cdot\frac{r\sin\theta}{r}+v_\theta\cdot\frac{r\cos\theta}{r^2}$$

(۲) $$\frac{\partial v}{\partial y}=v_r\cdot\sin\theta+v_\theta\cdot\frac{1}{r}\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow u_r\cos\theta-u_\theta\frac{1}{r}\sin\theta=v_r\sin\theta+v_\theta\cdot\frac{1}{r}\cos\theta$$

$\theta=0$: $u_r\cdot\cos 0=v_\theta\cdot\frac{1}{r}\cos 0 \Rightarrow u_r=\frac{1}{r}v_\theta$

$\theta=\frac{\pi}{2}$: $-u_\theta\cdot\frac{1}{r}\sin\frac{\pi}{2}=v_r\cdot\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow v_r=\frac{-1}{r}u_\theta$

معادلات کوشی - ریمان در مختصات قطبی

* اگر $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}$$

مثال) نشان دهید که برای $r>0$ و $-\pi<\theta<\pi$ تابع $f(z)$ مشتق پذیر است سپس $f'(i)$ را بیابید.

$$f(z)=(\ln r)^2-\theta^2+2i\theta\ln r$$

$u(r,\theta)=(\ln r)^2-\theta^2 \quad v(r,\theta)=2\theta\ln r$

$\frac{\partial u}{\partial r}=2\cdot\frac{1}{r}\ln r \;,\; \frac{\partial v}{\partial \theta}=2\ln r \qquad \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ ✓

$\frac{\partial v}{\partial r}=2\theta\cdot\frac{1}{r} \;,\; \frac{\partial u}{\partial \theta}=-2\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$ ✓

PAPCO

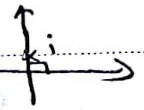
معادلات کوشی - ریمان برقرارند همچنین توابع $\frac{\partial u}{\partial r}$، $\frac{\partial u}{\partial \theta}$، $\frac{\partial v}{\partial r}$، $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ برای $r>0$ پیوسته‌اند پس تابع همه جا مشتق پذیر (تحلیلی) است

Scanned by CamScanner

$$f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta} \longrightarrow f'(z)=\left(\frac{2}{r}\,\mathrm{Ln}\,r+i\,2\theta\cdot\frac{1}{r}\right)e^{-i\theta}$$

$i=0+1i$

$r=1,\ \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$



$$f'(i)=\left(\frac{2}{1}\underbrace{\mathrm{Ln}\,1}_{0}+i\,2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cdot 1\right)e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

$$=i(\pi+4k\pi)\underbrace{e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}}_{\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}-i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}}$$

$$=i(\pi+4k\pi)(-i)$$

$$=\pi+4k\pi$$

تابع همساز (هارمونیک):

تعریف: تابع $h(x,y)$ را همساز گوییم هرگاه: $h_{xx}+h_{yy}=0$

مثال) نشان دهید تابع $h(x,y)=e^{2x}\cos 2y$ همساز است.

$h_x=2e^{2x}\cos 2y$ $\qquad h_y=-2e^{2x}\sin 2y$

$h_{xx}=4e^{2x}\cos 2y$ $\qquad h_{yy}=-4e^{2x}\cos 2y$

$$\Rightarrow h_{xx}+h_{yy}=0$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مزدوج همساز u است

قضیه: هرگاه $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد آنگاه توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ همساز هستند.

$f(z)$ تحلیلی

$f(z)$ تحلیلی است
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \text{و} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0 \Rightarrow$$ $u(x,y)$ همساز است

برای $v(x,y)$ به همین ترتیب

در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ ، $v(x,y)$ را مزدوج همساز $u(x,y)$ می نامیم.

مثال) نشان دهید که $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$ همساز است سپس مزدوج همساز آن را بیابید.

$u_x=2-3x^2+3y^2 \qquad u_y=6xy$

$u_{xx}=-6x \qquad u_{yy}=6x$

$u_{xx}+u_{yy}=0 \rightarrow$ $u(x,y)$ همساز است

$f(z)=u+iv$?

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=2-3x^2-3y^2 \Rightarrow v(x,y)=\int(2-3x^2+3y^2)\,dy+g(x)=2y-3x^2y+y^3+g(x) \quad (1) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-(6xy) \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-6xy+g'(x) \quad (2) \rightarrow g'(x)=0$$

$v(x,y)=2y-3x^2y+y^3+c \qquad g(x)=c$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توابع مختلط مقدماتی:

* $f(z)=e^{z}$

$=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

$e^{z}=\underbrace{e^{x}\cos y}_{u(x,y)}+i\underbrace{e^{x}\sin y}_{v(x,y)}$

* $|e^{z}|=\sqrt{u^{2}+v^{2}}=\sqrt{e^{2x}\cos^{2}y+e^{2x}\sin^{2}y}=\sqrt{e^{2x}}=e^{x}$

$\arg(e^{z})=y$

همواره: $e^{z}\neq 0$

اثبات: برهان خلف، زیرا فرض کنیم $e^{z}=0$

پس $|e^{z}|=0$

$e^{x}=0$ ✗

مثال) معادله ($e^{z}=2-3i$) را حل کنید.

$e^{x-iy}=2-3i$

$e^{x}\cos y-ie^{x}\sin y=2-3i$

$|e^{z}|=e^{x}$ $\quad |2-3i|=\sqrt{13}$

$e^{x}=\sqrt{13}\Rightarrow x=\ln\sqrt{13}$

$\begin{cases} e^{x}\cos y=2 \\ e^{x}\sin y=3 \end{cases}\rightarrow \tan y=\frac{3}{2}$

$y=\tan^{-1}\frac{3}{2}$

P4PCO

$z=x+iy=\ln\sqrt{13}+i\left(\tan^{-1}\frac{3}{2}\right)$

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$$

مشتق پذیری e^z:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \overset{?}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$e^x \cos y = e^x \cos y \checkmark \qquad -e^x \sin y = -(e^x \sin y) \checkmark$$

معادلات کوشی - ریمان برقرارند و نیز توابع $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ همه جا

پیوسته اند پس تابع e^z همه جا مشتق پذیر است.

* $(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y)$

$$= e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

* تابع e^z متناوب با دوره تناوب $2k\pi i$ است؛ زیرا:

$$e^{z+2k\pi i} = e^{x+iy+2k\pi i} = e^{x+i(y+2k\pi)}$$

$$= e^x \cdot e^{i(y+2k\pi)}$$

$$= e^x \cdot (\cos(y+2k\pi) + i\sin(y+2k\pi))$$

$$= e^x(\cos y + i \sin y)$$

($\cos y + i\sin y = e^{iy}$)

$$= e^x e^{iy}$$

$$= e^{x+iy}$$

$$= e^z$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توابع مثلثاتی:

برای x حقیقی داریم:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

تعریف: برای z های مختلط:

* $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$,

* $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

* $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$

* $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \underline{\qquad}$

* $\sec z = \dfrac{1}{\cos z} = \dfrac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}$

* **مشتق پذیری:** چون توابع e^{iz} و e^{-iz} به ازای هر z مشتق‌پذیرند پس توابع $\sin z$ و $\cos z$ که از ترکیب e^{iz} و e^{-iz} تشکیل شده‌اند، مشتق پذیرند.

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* $(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$ $\ast\ \frac{i}{i}$

$= -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z$

* $(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \cancel{i}\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2\cancel{i}} = \cos z$

* قسمت های حقیقی و موهومی $\sin z$ ؟

$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}$

$= \frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{ix}\cdot e^{-y}-e^{-ix}\cdot e^{+y}}{2i} = -i\,\frac{(\cos x+i\sin x)e^{-y}-(\cos x-i\sin x)e^{+y}}{2}$

$= -i\,\frac{\cos x(e^{-y}-e^{+y})+i\sin x(e^{-y}+e^{+y})}{2}$

$= -i\cos x\cdot\underbrace{\frac{e^{-y}-e^{+y}}{2}}_{-\sinh y} + \sin x\cdot\underbrace{\frac{e^{-y}+e^{+y}}{2}}_{\cosh y}$

$= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

* $\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

Subject
Date

مثال) صفرهای $\sin z$ ؟ ($\sin z=0$ را حل کنید)

$\sin z = 0$

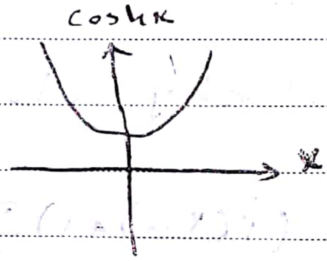
$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0 + 0i$

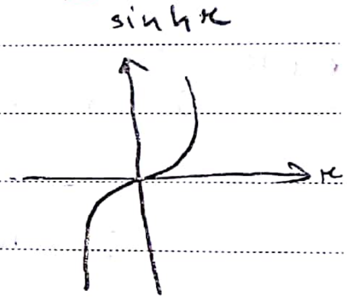
$$\begin{cases} \sin x \cosh y = 0 \xrightarrow{\cosh y \neq 0} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \Rightarrow \cos x = \pm 1 \\ \cos x \sinh y = 0 \xrightarrow{\cos x \neq 0} \sinh y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$z = x + iy$

$= k\pi + i0$

$z = k\pi$





* قسمت‌های حقیقی و موهومی $\cos z$ ؟

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{+y}}{2}$$

$$= \frac{(\cos x + i\sin x)e^{-y} + (\cos x - i\sin x)e^{+y}}{2}$$

$$= \cos x \underbrace{\frac{e^{-y} + e^{+y}}{2}}_{\cosh y} + i \sin x \underbrace{\frac{e^{-y} - e^{+y}}{2}}_{-\sinh y}$$

* $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Subject
Date

مثال) معادله $\cos z = i$ را حل کنید.

$$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 0 + i y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x \cosh y = 0 \xrightarrow{\cosh y \neq 0} \cos x = 0 \rightarrow x = (2k\pi + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x = \pm 1 \\ ① \ \sin x \sinh y = -1 \end{cases}$$

$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ زوج k: $\sin x = +1 \xrightarrow{①} \sinh y = -1 \rightarrow y = \sinh^{-1}(-1)$

$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ k فرد: $\sin x = -1 \xrightarrow{①} \sinh y = +1 \rightarrow y = \sinh^{-1}(+1)$

$$z = x + iy = (2(2\pi) + 1)\frac{\pi}{2} + i \sinh^{-1}(-1)$$

,

$$z = x + iy = (2(2\pi + 1) + 1)\frac{\pi}{2} + i \sinh^{-1}(+1)$$

توابع مختلط هایپربولیک (هذلولی):

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

ارتباط توابع مثلثاتی و هایپربولیک:

$$* \cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z$$

$$\cos(iz) = \cosh z$$

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$* \cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

$\cosh(iz) = \cos z$

$* \sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{+z}}{2i} = -i\frac{e^{-z} - e^{+z}}{2} = i\underbrace{\frac{e^{+z} - e^{-z}}{2}}_{\sinh z}$

$\sin(iz) = i\sinh z$

$* \sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \left(* \frac{i}{i}\right) = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i\sin z$

$\sinh(iz) = i\sin z$

$\sinh z = -i\sin(iz)$

$\sin(iz) =$

فرمول های جمع:

$* \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

$* \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

$* \sinh(z_1 \pm z_2) = -i\sin(iz_1 \pm iz_2)$

$= -i\big(\underbrace{\sin(iz_1)}_{i\sinh z_1}\underbrace{\cos(iz_2)}_{\cosh z_2} \pm \underbrace{\cos(iz_1)}_{\cosh z_1}\underbrace{\sin(iz_2)}_{i\sinh z_2}\big)$

$= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* قسمت های حقیقی و موهومی $\sinh(z)$ ؟

روش ۱: $\sinh(z) = \sinh(\underbrace{x}_{z_1} + \underbrace{iy}_{z_2})$

$= \sinh x \cosh(iy) + \cosh x \cdot \sinh(iy)$

($\cosh(iy) \to \cos y$, $\sinh(iy) \to i\sin y$)

$= \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y$

روش ۲: $\sinh(z) = -i\sin(\underbrace{iz}_{i(x+iy)}) = -i\sin(\underbrace{ix}_{z_1} + \underbrace{-y}_{z_2})$

$= -i\left(\sin(ix)\cos(-y) + \cos(ix)\sin(-y)\right)$

($\sin(ix) \to \sinh x$, $\cos(-y) \to \cos y$, $\cos(ix) \to \cosh x$, $\sin(-y) \to -\sin y$)

$= \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y$

مثال: $\sinh z = i$ را حل کنید.

$\sinh z = \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y = 0 + 1i$

$$\begin{cases} \sinh x \cos y = 0 \Rightarrow \sinh x = 0 \to x = 0 \quad \text{یا} \quad \cos y = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{یا} \quad y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ (2)\ \cosh x \sin y = 1 \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow \cosh x = 1 \xrightarrow{(2)} \sin y = 1 \to y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k زوج)

$y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k زوج)

$y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin y = +1 \xrightarrow{(2)} \cosh x = +1 \to x = 0$

یا $\sin y = -1 \xrightarrow{(2)} \cosh x = -1$ امکان ندارد.

$z = x + iy$: $x \to 0$, $y \to (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k زوج)

Scanned by CamScanner

* $\cosh(z_1+z_2)=\cos i(z_1+z_2)$

$= \cos(iz_1+iz_2)=\cos(iz_1)\cos(iz_2)-\sin(iz_1)\sin(iz_2)$

$= \cosh z_1 . \cosh(z_2) - i\sinh z_1 . i\sinh z_2$

$= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

تمرین: قسمت های حقیقی و موهومی $\cosh z$ ؟

* تابع $\ln z$:

$w=e^z \Longleftrightarrow \ln w = z$

$\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2k\pi$

$-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$

$z = re^{i\theta}$ ($\theta \rightarrow \arg z$)

$\ln z = \ln(re^{i\theta})$

$= \ln r + \ln(e^{i\theta})$

$= \ln r + i\theta$

$= \ln|z| + i\arg z$ بی نهایت مقدار

اگر به جای $\arg z$، $\mathrm{Arg}\, z$ را در نظر بگیریم؟

* $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$

$\ln z = \ln r + i\arg z$

$= \ln|z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)$

$= \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi i$

$= \mathrm{Ln}\, z + 2k\pi i$

Scanned by CamScanner

مثال) $\ln(-1)$ ؟

$z = -1 + 0i$

$r = 1 \quad \theta = \pi + 2k\pi$ (π → $\operatorname{Arg} z$)

$\ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1)$

$= \ln 1 + i(\pi + 2k\pi)$ ($\ln 1$ → 0)

$= i(\pi + 2k\pi)$

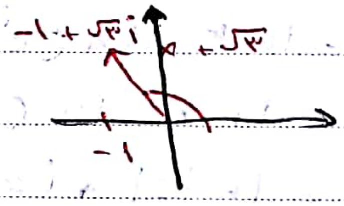
$\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln}|-1| + i\operatorname{Arg}(-1)$

$= 0 + i\pi$

مثال) $\operatorname{Ln}(-1+\sqrt{3}\,i)$ ؟

$= \operatorname{Ln}|-1+\sqrt{3}\,i| + i\operatorname{Arg}(-1+\sqrt{3}\,i)$

$= \operatorname{Ln} 2 + i\,\frac{3\pi}{4}$



مشتق پذیری $\operatorname{Ln} z$:

$$z = re^{i\theta} \quad i\theta \to \operatorname{Arg} z$$

$$\operatorname{Ln} z = \underbrace{\operatorname{Ln} r}_{u(r,\theta)} + \underbrace{i\theta}_{v(r,\theta)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \checkmark$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \checkmark$$

معادلات کوشی - ریمان برقرارند و نیز توابع $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial \theta}$

پیوسته اند پس $\operatorname{Ln} z$ مشتق پذیر است.

$$(\operatorname{Ln} z)' = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$$

$$= \left(\frac{1}{r} + i\,0\right)e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

برای z های مختلط :

$$\operatorname{Ln}(z^n) \neq n.\operatorname{Ln}(z)$$

مثال)

$$\operatorname{Ln}(i^2) \overset{?}{=} 2\operatorname{Ln}(i)$$

$$\operatorname{Ln}(i^2) = \operatorname{Ln}(-1) = \underbrace{\operatorname{Ln}|-1|}_{0} + i\underbrace{\arg(-1)}_{\pi + 2k\pi} = i(\pi + 2k\pi)$$

$$\operatorname{Ln}(i) = \operatorname{Ln}|i| + i\underbrace{\arg(i)}_{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\Rightarrow \ln(i^2) \neq 2\ln(i)$$

Scanned by CamScanner

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تابع توانی: z^c (z و c اعداد مختلط)

تعریف: $z^c = e^{c\ln z} = e^{c(\ln|z| + i\arg z)}$

مقدار اصلی: $z^c = e^{c\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{c(\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z)}$

مثال) $(-i)^{(\sqrt{3}-1)} = e^{(\sqrt{3}-i)\ln(-i)}$

$$= e^{(\sqrt{3}-i)(\ln|-i| + \arg(-i))}$$

($\ln|-i| = \ln 1 = 0$ ، $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$)

$$= e^{(\sqrt{3}-i)\cdot i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

$$= e^{\sqrt{3}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)i + (-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

$$= e^{(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \cdot e^{i(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi + 2\sqrt{3}k\pi)}$$

$$= e^{(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \cdot \left(\cos(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi + 2\sqrt{3}\pi) + i\sin(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi + 2\sqrt{3}k\pi)\right)$$

مثال: مقدار اصلی: $(1+i)^{\frac{i}{2}} = e^{\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{\frac{i}{2}(\ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i))}$ ($|1+i| = \sqrt{2}$ ، $\mathrm{Arg}(1+i) = +\frac{\pi}{4}$)

$$\Rightarrow e^{\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{8}} \cdot e^{\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\sqrt{2}}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{8}}\left(\cos\tfrac{1}{2}\cos\sqrt{2} + i\sin\tfrac{1}{2}\cos\sqrt{2}\right)$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

توابع معکوس مثلثاتی: $w=\sin^{-1} z \Longleftrightarrow \sin w = z$

می‌خواهیم $\sin^{-1} z$ را بر حسب z بنویسیم.

$$z=\sin w \Rightarrow z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} \Rightarrow z=\frac{e^{iw}-\frac{1}{e^{iw}}}{2i}$$

$$\Rightarrow z=\frac{e^{2iw}-1}{2ie^{iw}} \Rightarrow e^{2iw}-1=2ize^{iw}$$

معادله درجه دوم $\quad e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0$

$$e^{iw}=y:\quad y^2-2izy-1=0$$

$$e^{iw}=\frac{iz\pm\sqrt{i^2z^2+1}}{1}$$

$$e^{iw}=iz+\sqrt{-z^2+1} \Rightarrow iw=\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

$$w=\frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

$$\sin^{-1} z=-i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

به همین ترتیب می‌توان بدست آورد:

$$\cos^{-1} z=-i\ln(z+i\sqrt{1-z^2})$$

$$\cos^{-1}(i)\overset{?}{=}-i\ln(i+i\sqrt{1-(i)^2})$$

$$=-i\ln i(1+\sqrt{2})=-i(\underbrace{\ln|(1+\sqrt{2})i|}_{1+\sqrt{2}}+i\underbrace{\arg((1+\sqrt{2})i)}_{\frac{\pi}{2}+2k\pi})$$

$$=-i\ln(1+\sqrt{2})+(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

نگاشت : $w = f(z) = u + iv$ ، $z = x + iy$

در نگاشت ، نیاز به دو صفحه‌ی مختلط داریم ، معمولاً یک ناحیه یا خم را در

صفحه‌ی z با محور حقیقی x و محور موهومی y در نظر گرفته و تصویر آن (چگونگی

تبدیل آن) تحت نگاشت $w = f(z)$ را در صفحه مختلط w با محور حقیقی u

و محور موهومی v بررسی می‌کنیم .

نگاشت خطی : $w = az + b$ (در حالت کلی a و b مختلط هستند)

$z = re^{i\theta}$ $\quad a = |a| e^{i\,Arg(a)}$

$= |z| e^{i\,Arg\,z}$

$w = az \Rightarrow |a||z| \cdot e^{i(Arg(a) + Arg(z))}$

$\Rightarrow |w| = |az| = |a| \cdot |z|$ $\begin{cases} |a| > 1 : & \text{انبساط} \\ |a| < 1 & \text{انقباض} \end{cases}$

$Arg\,w = Arg(a) + Arg(z)$: دوران

$w = \underbrace{az}_{w_1} + b$

انتقال w_1 به اندازه‌ی b

Subject
Date

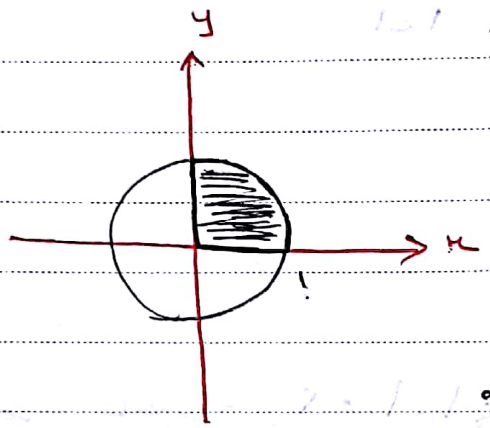
مثال) تصویر ناحیه $|z| \leq 1$ (دایره به مرکز ۰ و شعاع ۱) ($x \geq 0$ و $y \geq 0$) (x و y مثبت ربع اول دایره) تحت نگاشت ؟

$w = (1+i) z + i$

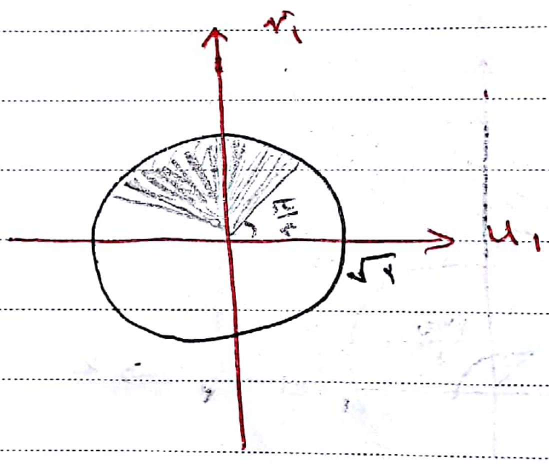
$w_1 = (1+i) z$

$|w_1| = |1+i||z| \leq \sqrt{2}$ ($|1+i| = \sqrt{2}$, $|z| \leq 1$)

$\operatorname{Arg} w_1 = \operatorname{Arg}(1+i) + \operatorname{Arg}(z)$ ($\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$)

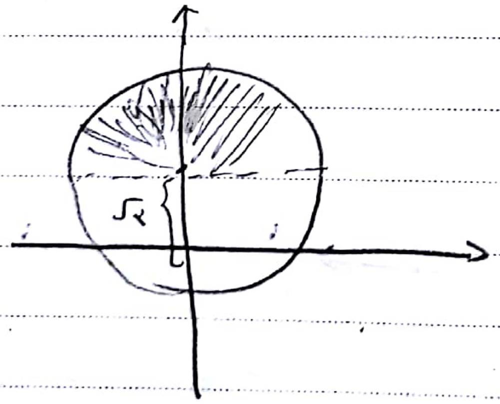


$0 + \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} w_1 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ($\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$)



$w = w_1 + i$

w_1 = ۱ واحد به سمت بالا انتقال می یابد



Subject

Date

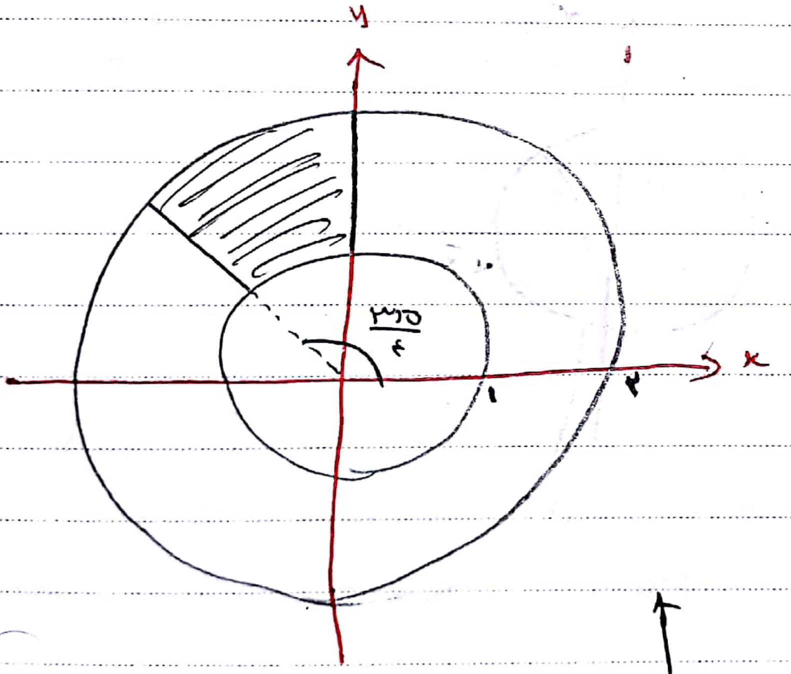
نگاشت معکوس : $w = \frac{1}{z}$

$z = re^{i\theta} \quad r = |z| \quad \theta = \operatorname{Arg} z$

$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \\ \operatorname{Arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z \end{cases}$

مثال: تصویر ناحیه‌ی $1 \leq |z| \leq ۲$ و $\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \frac{۳\pi}{۴}$ با نگاشت $w = \frac{1}{z}$؟

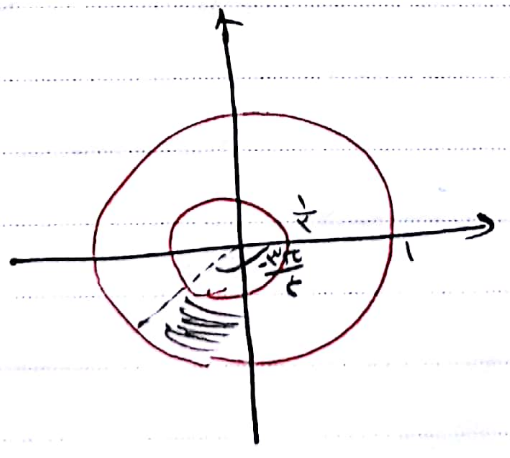


$1 \leq |z| \leq ۲$

$1 \geq \underbrace{\frac{1}{|z|}}_{|w|} \geq \frac{1}{۲}$

$\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \frac{۳\pi}{۴}$

$-\frac{۳\pi}{۴} \leq \underbrace{-\theta}_{\operatorname{Arg} w} \leq -\frac{\pi}{۲}$



Subject
Date

لم: دو خط یا دایره با معادله $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ در

صفحه z با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به خط یا دایره‌ی $A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0$

در صفحه w تبدیل می‌شود.

اثبات:

$z=x+iy$

$\bar{z}=x-iy$

$\rightarrow x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$, $|z|^2=x^2+y^2$

$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$

$A|z|^2+B\frac{z+\bar{z}}{2}+C\frac{z-\bar{z}}{2i}+D=0$

$w=\frac{1}{z} \; ; \; z=\frac{1}{w}$

$A\frac{1}{|w|^2}+B\frac{\frac{1}{w}+\frac{1}{\bar{w}}}{2}+C\frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}}}{2i}+D=0$

u $\quad$ $-v$

$A\cdot\frac{1}{|w|^2}+B\frac{\bar{w}+w}{2w\bar{w}}+C\frac{\bar{w}-w}{2iw\bar{w}}+D=0$

$|w|^2 = w\bar{w}$

$w=u+iv$

$\bar{w}=u-iv$

$\rightarrow u=\frac{w+\bar{w}}{2}$, $v=\frac{w-\bar{w}}{2i}$, $|w|^2=u^2+v^2=w\bar{w}$

$\times w\bar{w}: \; A+Bu-Cv+Dw\bar{w}=0$

$w\bar{w} = (u^2+v^2)$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) تصویر خط $y = x$ با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ ؟

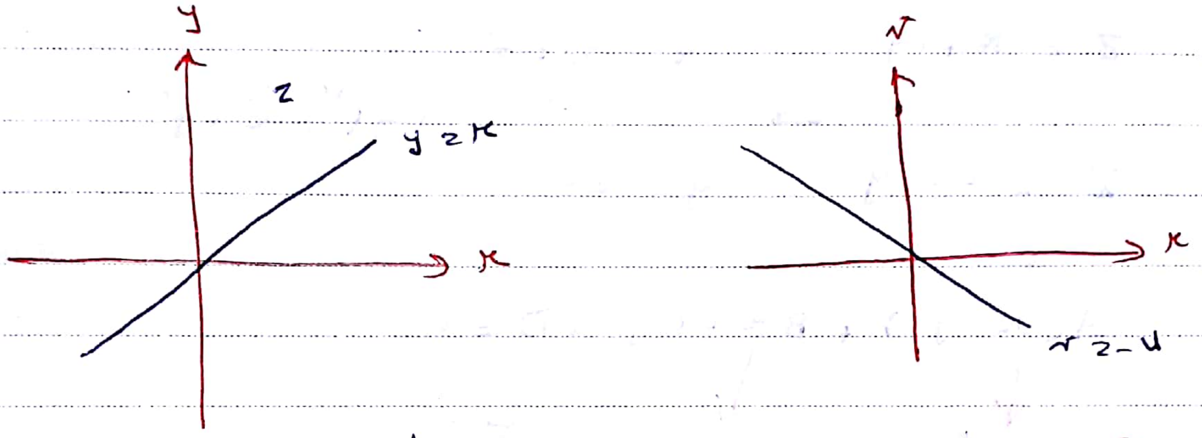
$x - y = 0$

$A = 0 \,,\, B = 1 \,,\, C = -1 \,,\, D = 0$

$w = \frac{1}{z}$

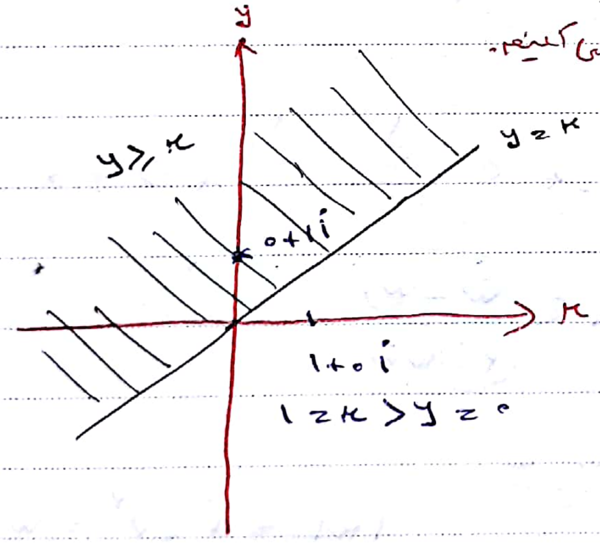
$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$

$u + v = 0 \;:\; v = -u$



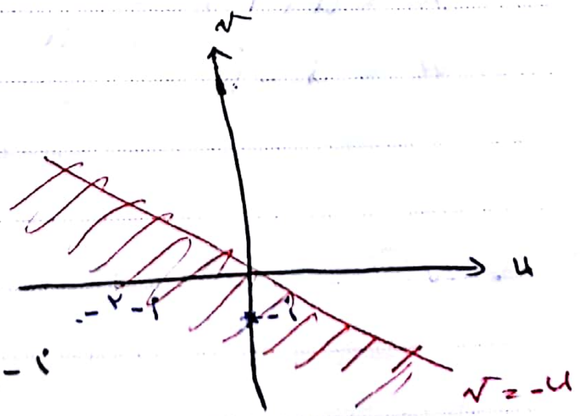
مثال) تصویر ناحیه‌ی $x \le y$ با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ ؟

ابتدا تصویر خط $y = x$ را بررسی می‌کنیم.



$z = i$

$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{i} = -i$



$w = \underbrace{-2}_{u} - i$

$u = -2 \,,\, v = -1 \qquad v \le -u$

$-u = +2$

مثال) تصویر ناحیه‌ی $|z+1|\le 1$ با نگاشت $w=\frac{1}{z}$؛

$|x+iy+1| = |(x+1)+iy|$

$= \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+1+2x+y^2} \le 1$

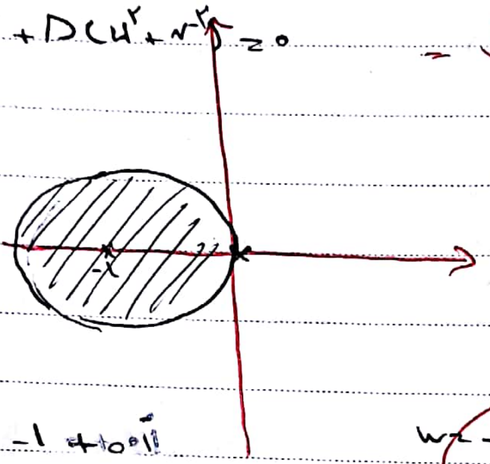
$x^2+1+2x+y^2 \le 1$

ابتدا: $x^2+y^2+1+2x=1$

x^2+y^2+2x

$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$

$A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0$



$A=1,\ B=2,\ C=0,\ D=0$

$w=\frac{1}{z}$

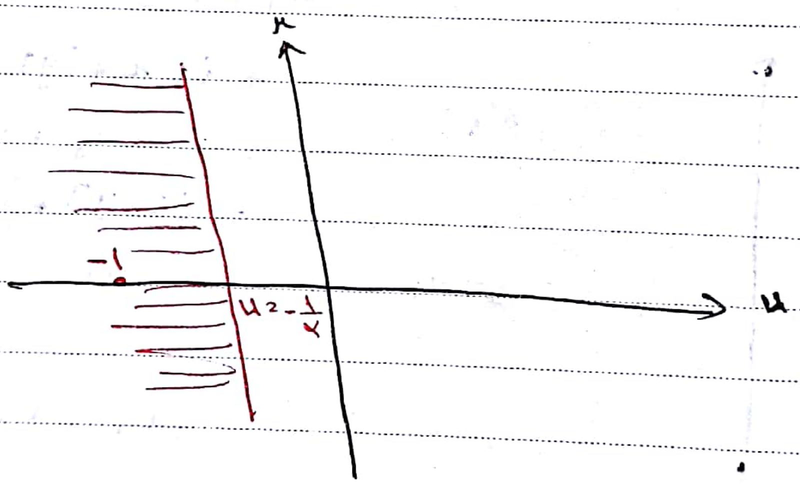
$A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0$

$1+2u=0 \qquad u=-\frac{1}{2}$

آزمون: $z=-1$ دلخواه در ناحیه‌ی مورد نظر

$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{-1}=-1$

$u=-1$



نگاشت دوخطی (موبیوس): (در حالت کلی به طور کلی مختلط هستند)

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

با در نظر گرفتن $k=\frac{bc-ad}{c}$ می‌توانیم داشته باشیم

$$w=k\cdot\frac{1}{cz+d}+\frac{a}{c}$$

خطی: $w_1=cz+d$

عکس: $w_2=\frac{1}{w_1}$

دوران: $w_3=kw_2$

انتقال: $w=w_3+\frac{a}{c}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال ۱) تصویر $\operatorname{Im} z \le 0$ با نگاشت $w = \frac{z+i}{iz+1}$ ؟

($a=1$, $b=i$, $c=i$, $d=1$, $\operatorname{Im} z = y$)

$$K = \frac{i^2-1}{i} = \frac{-2}{i} = +2i$$

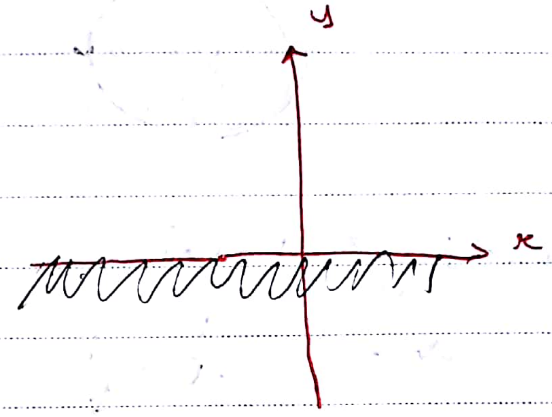
$$w = (2i)\cdot\frac{1}{iz+1} + \underbrace{\frac{1}{i}}_{-i}$$

$w_1 = iz+1$

$w_2 = \frac{1}{w_1}$

$w_3 = (2i)\,w_2$

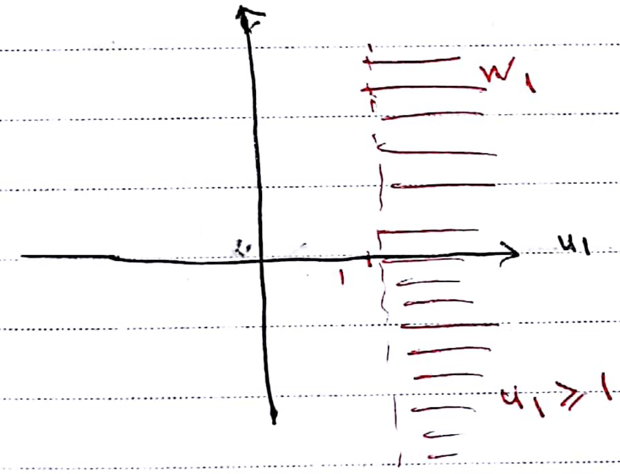
$w = w_3 - i$



$$w_1 = iz+1$$
$$= i(x+iy)+1$$
$$= ix - y + 1$$
$$= \underbrace{(1-y)}_{u_1} + i\underbrace{x}_{v_1}$$

$y \le 0 \Rightarrow -y \ge 0$

$u_1 = 1-y \ge 1$



ابتدا تصویر $u_1 = 1$ را با نگاشت $w_2 = \frac{1}{w_1}$ بررسی می کنیم:

$u_1 - 1 = 0$

$A = 0,\ B = 1,\ C = 0,\ D = -1$

$w_2 = \frac{1}{w_1}$

$$A + Bu_2 - Cv_2 + D(u_2^2 + v_2^2) = 0$$

($A \to 0$, $B \to 1$, $C \to 0$, $D \to -1$)

$$u_2 - (u_2^2 + v_2^2) = 0 \Rightarrow u_2^2 + v_2^2 - u_2 = 0$$

$$(u_2 - \tfrac{1}{2})^2 + v_2^2 = \tfrac{1}{4}$$

P4PCO

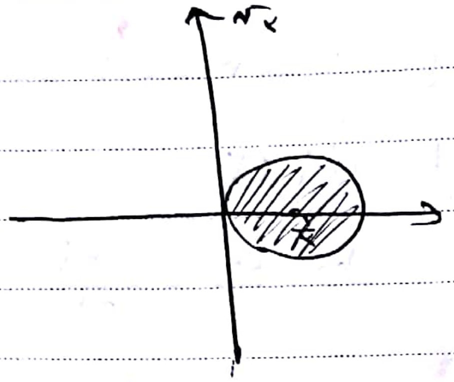
دایره به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ در صفحه w_2

$w_1 = 2 + 0i$

$w_2 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date



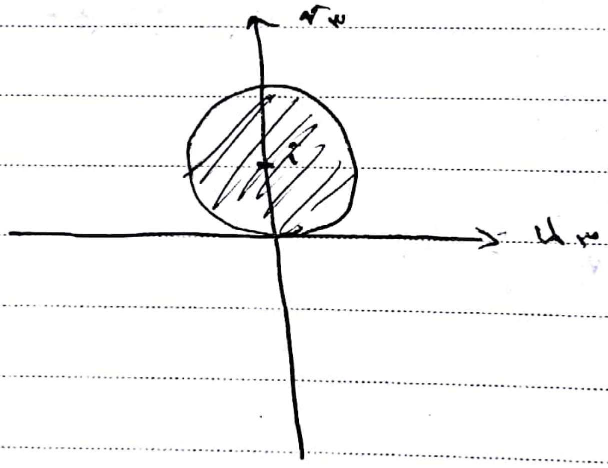
$$\frac{1}{2} + 0i$$

$$w_3 = (2i)\,w_2 = (2i)(u_2 + i v_2) = i$$

$$|w_3| = \underbrace{|2i|}_{2}\,|w_2| = 2\,|w_2|$$

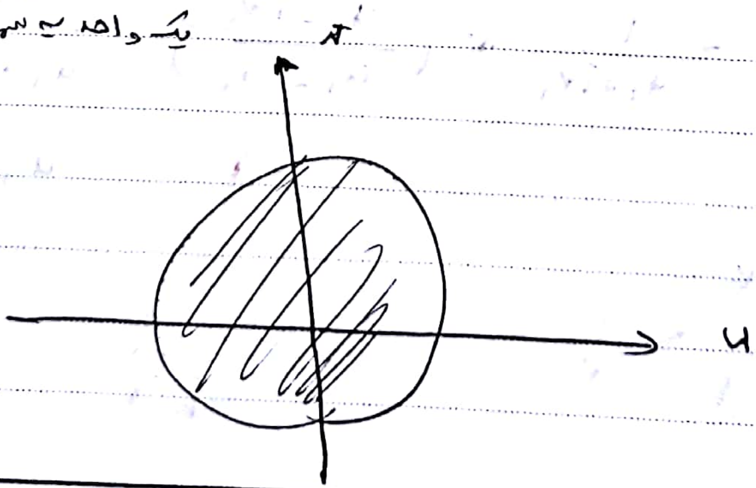
$$\operatorname{Arg} w_3 = \underbrace{\operatorname{Arg}(2i)}_{\frac{\pi}{2}} + \operatorname{Arg}(w_2)$$

دوران به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$



$$w = w_3 - i$$

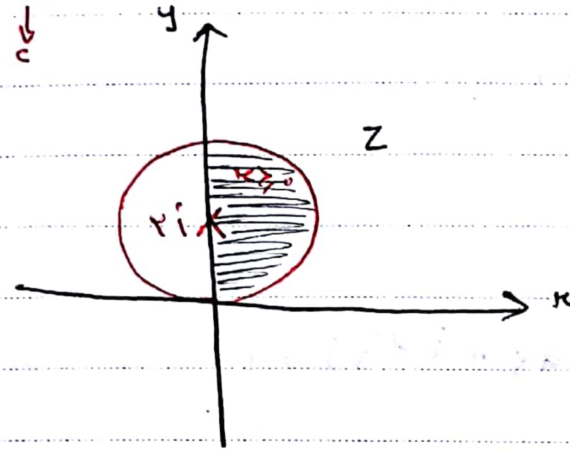
یک واحد به سمت پایین انتقال می‌یابد



Subject
Date

مثال) تصویر ناحیه $x^2+(y-2)^2 \leq 4$ $(x \geq 0)$ توسط نگاشت $w = \frac{2i+z}{2i-z}$

$|z-2i| \leq 2$



$k = \frac{bc-ad}{c} = \frac{-4i}{-1} = 4i$

$w = (4i) \cdot \frac{1}{2i-z} - 1$

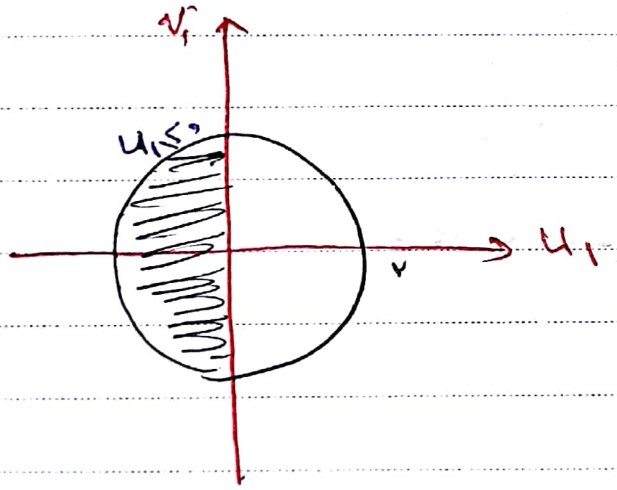
$$\begin{cases} w_1 = 2i - z \\ w_2 = \frac{1}{w_1} \\ w_3 = (4i)\, w_2 \\ w = w_3 - 1 \end{cases}$$

$*\; w_1 = 2i - z = 2i - x - iy = -x + i(2-y)$; $u_1 = -x$, $v_1 = 2-y$

$|w_1| = |2i - z| = |z - 2i| \leq 2$

w_1 داخل دایره و صفحه : $|w_1| \leq 2$

$x \geq 0 \Rightarrow u_1 = -x \leq 0$



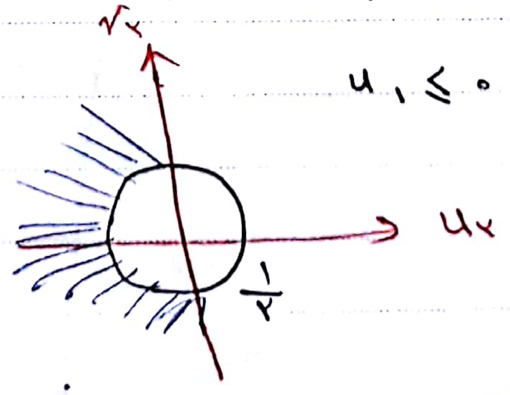
$*\; w_2 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{u_1 + i v_1} * \left(\frac{u_1 - i v_1}{u_1 - i v_1}\right) = \frac{u_1}{u_1^2 + v_1^2} - i \frac{v_1}{u_1^2 + v_1^2}$

$|w_2| = \frac{1}{|w_1|}$

$|w_1| \leq 2$

$|w_2| = \frac{1}{|w_1|} \geq \frac{1}{2}$

$u_1 \leq 0 \Rightarrow u_2 \leq 0$



P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

* $w_3 = (2i)w_2$: دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$

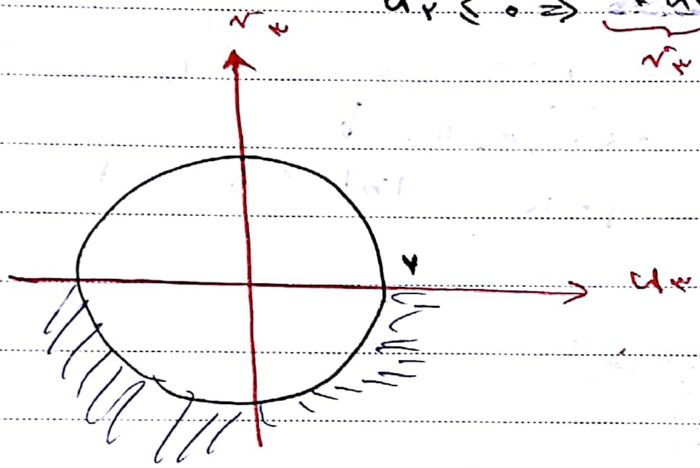
$\mathrm{Arg}\,2i = \frac{\pi}{2}$

$|w_3| = |2i||w_2| \geq 2$ ($|2i| = 2$, $|w_2| \geq \frac{1}{2}$)

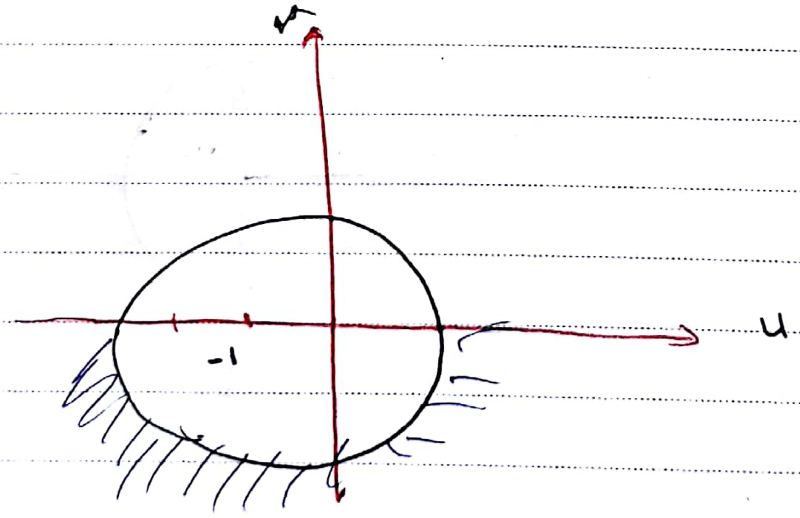
$w_3 = (2i)(u_2 + iv_2)$

$= 2iu_2 - 2v_2 = \underbrace{-2v_2}_{u_3} + i\underbrace{2u_2}_{v_3}$

$u_2 \leq 0 \Rightarrow \underbrace{2u_2}_{v_3} \leq 0$



* $w = w_3 - 1$



Scanned by CamScanner

Subject
Date

نگاشت $W = e^z$:

$= e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

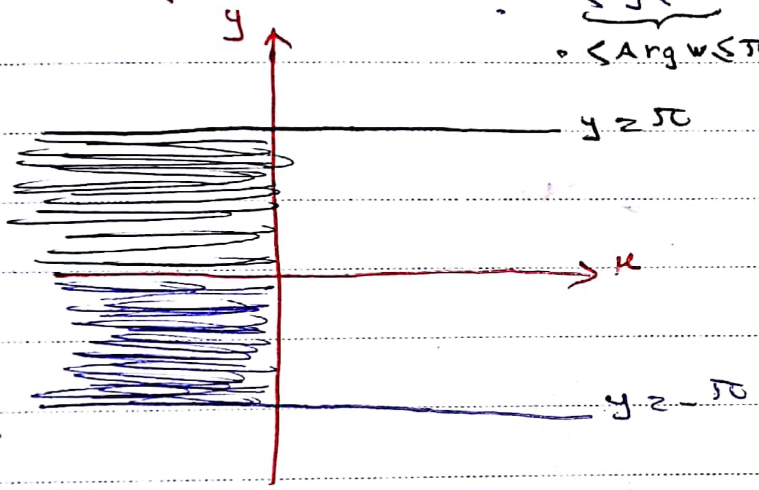
$|w| = |e^z| = e^x \quad , \operatorname{Arg} e^z = y$

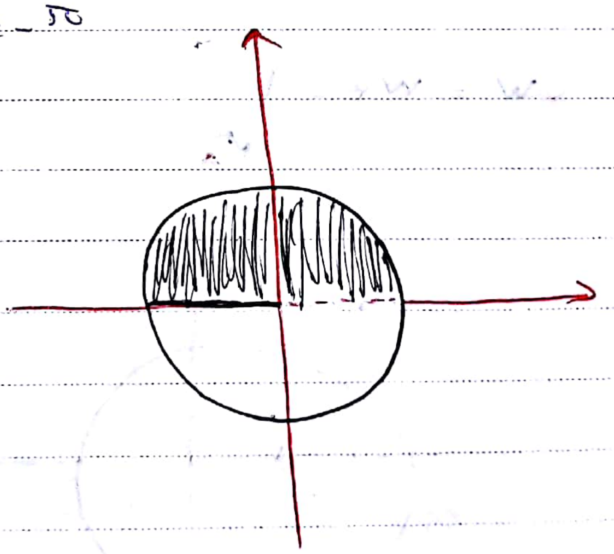
$W = e^z \neq 0$ همواره

مثال) تصویر ناحیه $x \leq 0$ و $0 \leq y \leq \pi$ با نگاشت $W = e^z$ ؟

$0 \leq \operatorname{Arg} w \leq \pi$

$|w| = e^x \leq e^0 = 1$

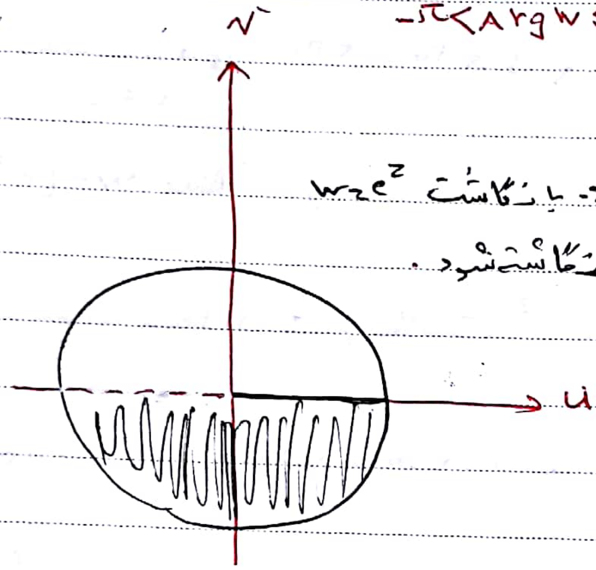




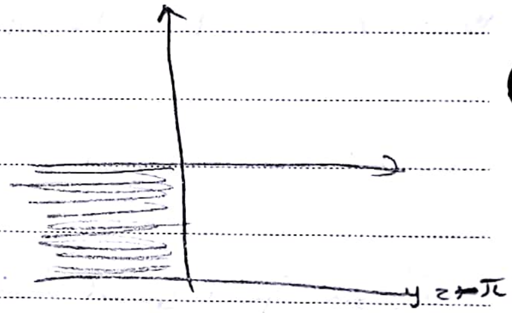
Subject
Date

مثال) تصویر نوار $x \leq 0$ و $-\pi < y \leq 0$ با نگاشت $w = e^z$ ؟

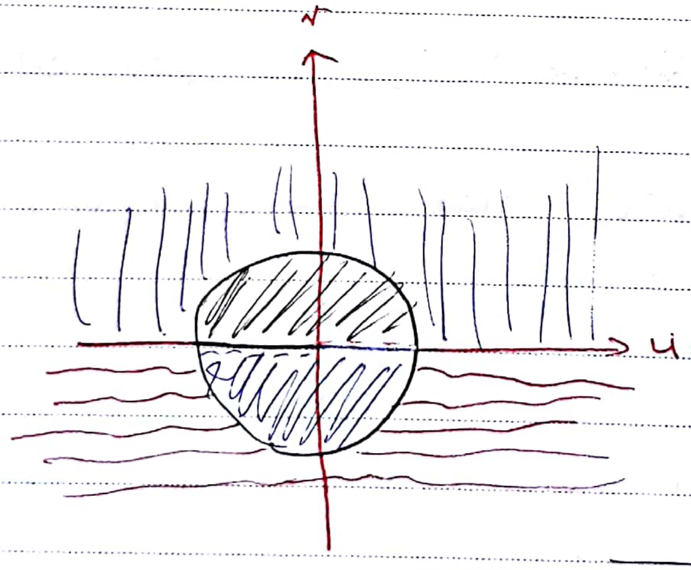
$-\pi < Arg\, w \leq 0$ $\qquad$ $|w| = e^x \leq e^0 = 1$

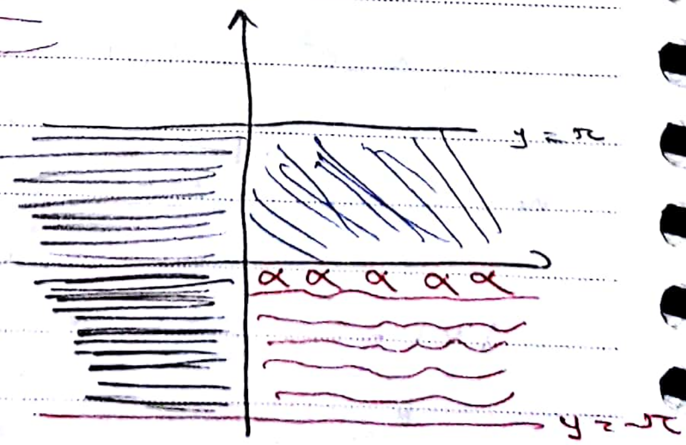


پس ناحیه‌ی $x \leq 0$ و $-\pi < y \leq 0$ با نگاشت $w = e^z$ به $|w| \leq 1$ به غیر از $\{0\}$ نگاشته شود.



به همین ترتیب ناحیه‌ی $x > 0$ و $-\pi < y \leq \pi$ با نگاشت $w = e^z$ به $|w| > 1$ به غیر از $\{0\}$ نگاشته می‌شود.





Subject
Date

در نتیجه نوار $-\pi < y \le \pi$ با نگاشت $w=e^z$ به کل صفحه مختلط $w-\{0\}$ می رود

به همین ترتیب نوارهای $-\pi + k\pi < y \le \pi + k\pi$ ، $k \in Z$ با نگاشت $w=e^z$ به کل صفحه $w-\{0\}$ نگاشت می شود

پس کل صفحه مختلط z با نگاشت $w=e^z$ بی نهایت بار به کل صفحه $w-\{0\}$ می رود یعنی تصویر بی نهایت نقطه از صفحه z یک نقطه از صفحه w می باشد یا نگاشت $w=e^z$ یک به یک نبوده و معکوس پذیر نیست اما می دانیم که معکوس آن یعنی $z=\ln w$ وجود دارد. ✗

برای رفع این تناقض ریمان فرض کرد که صفحه w از بی نهایت صفحه تشکیل شده که به صورت لایه هایی روی هم قرار گرفته اند که هر کدام تصویر یکی از نوارهای در صفحه z است شاخه اصلی $\ln w$ شاخه ای که در آن $-\pi < Arg\, w \le \pi$

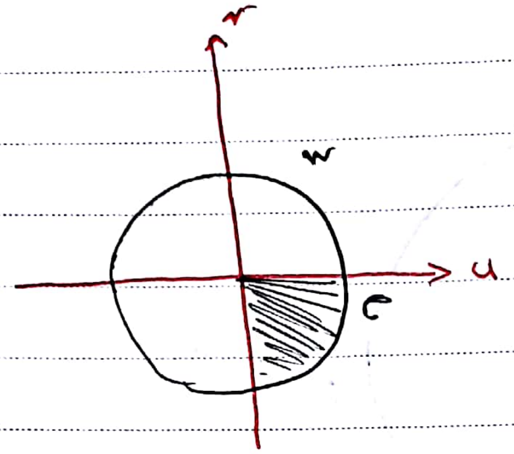
مثال) تصویر ناحیه $x \le 1$ و $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ با نگاشت $w=e^{\bar z}$ ؟

$$w = e^{\bar z} = e^{x-iy} = e^x \cdot e^{-iy}$$
$$= e^x \left(\cos(-y) + i\sin(-y)\right)$$

$$|w| = e^x \quad , \quad Arg\, w = -y$$
$$x \le 1 \qquad 0 \le y < \frac{\pi}{2}$$
$$|w| = e^x \le e^1 \qquad -\frac{\pi}{2} < \underbrace{-y}_{Arg\, w} \le 0$$

Subject

Date



نگاشت $w = z^2$:

$z = re^{i\theta}$ $\quad r = |z|$ $\quad \theta = \operatorname{Arg} z$

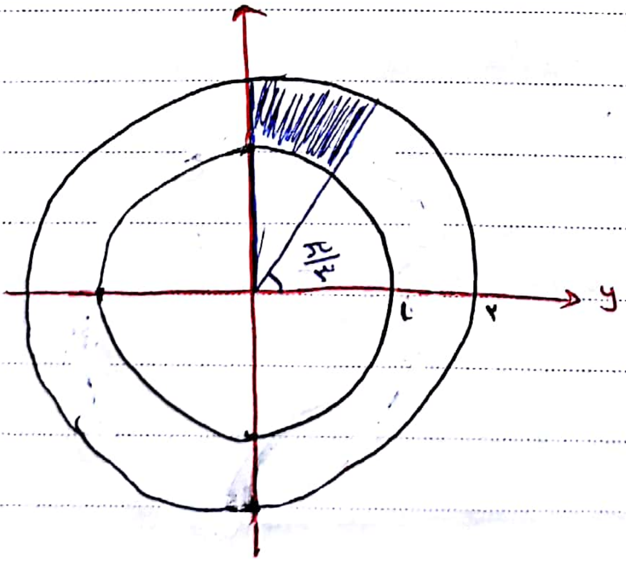
$w = z^2 = r^2 e^{i2\theta}$

$\Rightarrow |w| = |z^2| = r^2 = |z|^2$

و

$\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z^2 = 2 \operatorname{Arg} z$

مثال: تصویر ناحیه $1 \le |z| \le 2$ و $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ با نگاشت $w = z^2$ ؟

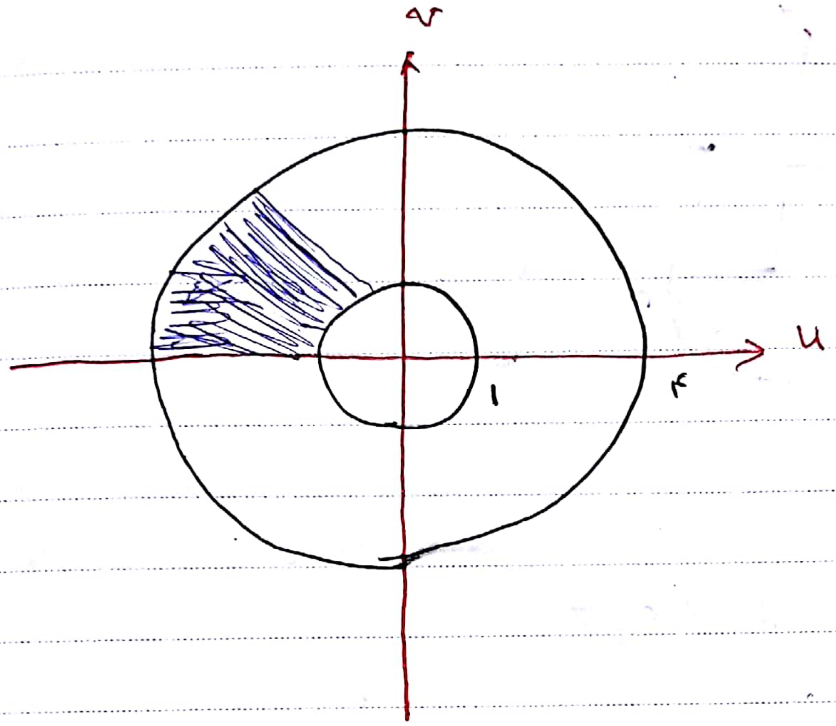


PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

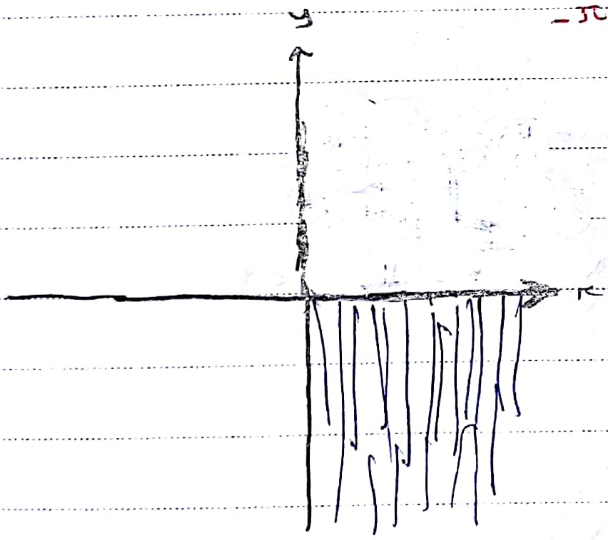
Date

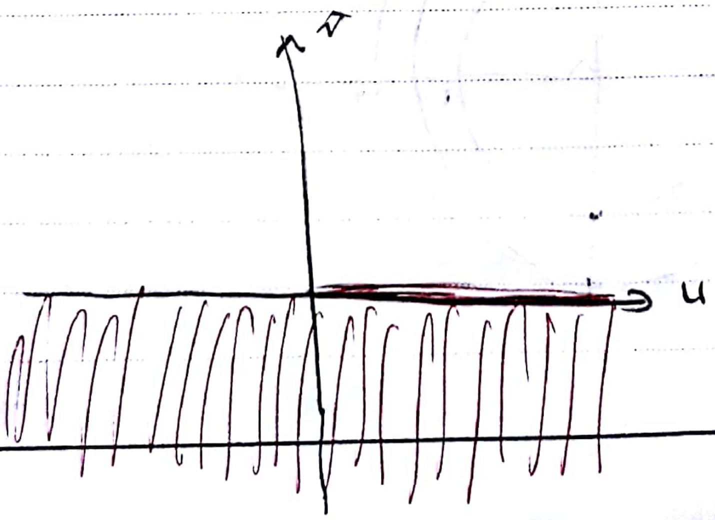


مثال) تصویر ناحیه ی $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ با نگاشت $w = z^2$ ؟

$$-\pi < 2\theta \leq \pi$$

2θ : Arg w

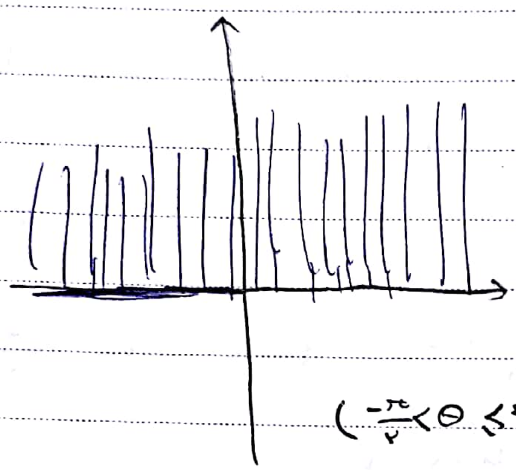




Subject
Date

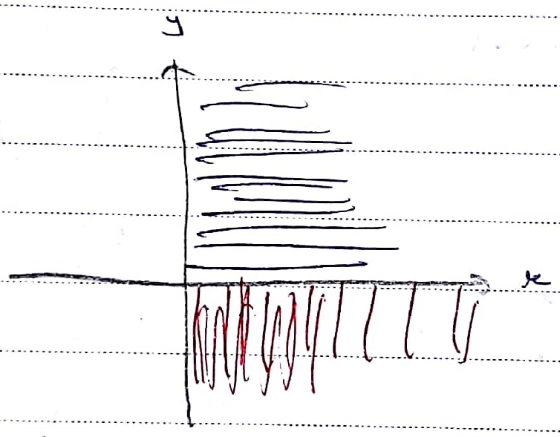
مثال) تصویر ناحیه ی $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ با نگاشت $w = z^2$ ؟

$0 < Arg\, w = 2\theta \le \pi$



پس: نیم صفحه راست در صفحه z $(-\frac{\pi}{2} < \theta \le +\frac{\pi}{2})$

با $w = z^2$ به کل صفحه مختلط w می رود



نگاشت $w = z^n$:

$z = re^{i\theta} \quad r = |z| \quad \theta = Arg\, z$

$w = z^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow |w| = |z^n| = |z|^n$

$Arg\, w = Arg\, z^n = n\, Arg\, z$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

نگاشت $w=\sin z$:

$w=\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

$u(x,y)=\sin x\cosh y$ $\qquad$ $v(x,y)=\cos x\sinh y$

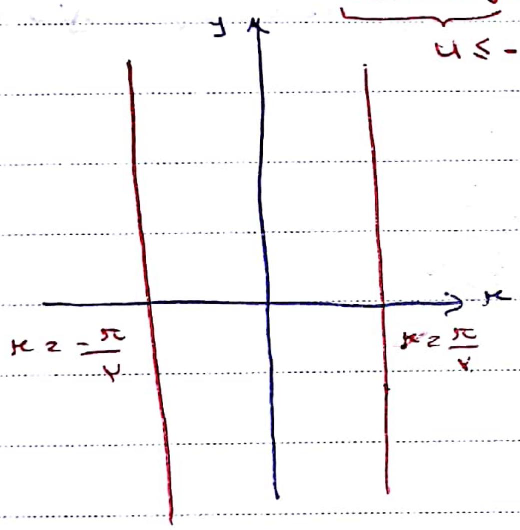
تصویر ناحیه‌ی $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq+\frac{\pi}{2}$ را با نگاشت $w=\sin z$ بررسی می‌کنیم :

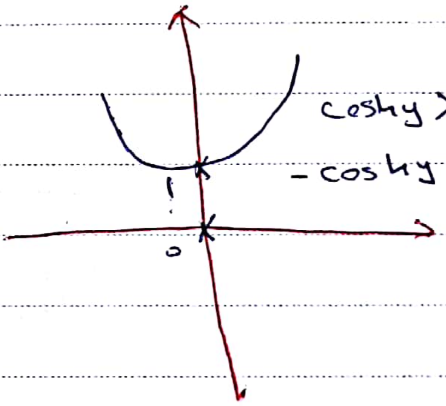
$x=-\frac{\pi}{2}$: $u=\underbrace{\sin(-\frac{\pi}{2})}\cosh y$, $v=\cos(-\frac{\pi}{2})\sinh y=0$

$u=-1\cosh y$

$\underbrace{-\cosh y\leq -1}$

$u\leq -1$





$\cosh y\geq 1$

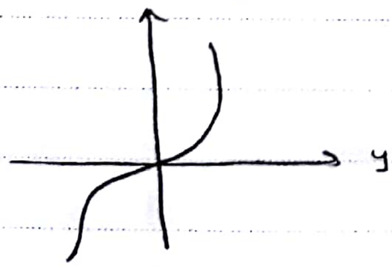
$-\cosh y\leq -1$

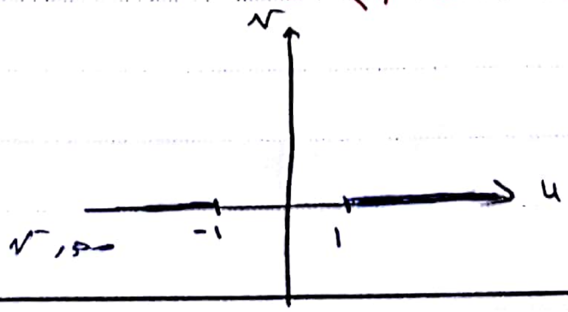
$x=+\frac{\pi}{2}$: $u=\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}\cosh y$ $\qquad$ $v=\cos\frac{\pi}{2}\sinh y=0$

$=\cosh y\geq 1$

$x=0$ (محور y) : $u=\sin 0\cosh y=0$, $v=\cos 0\sinh y=\sinh y$

$-\infty<v=\sinh y<+\infty$





خطوط قائم $x = c \neq \pm \frac{\pi}{2}, 0$:

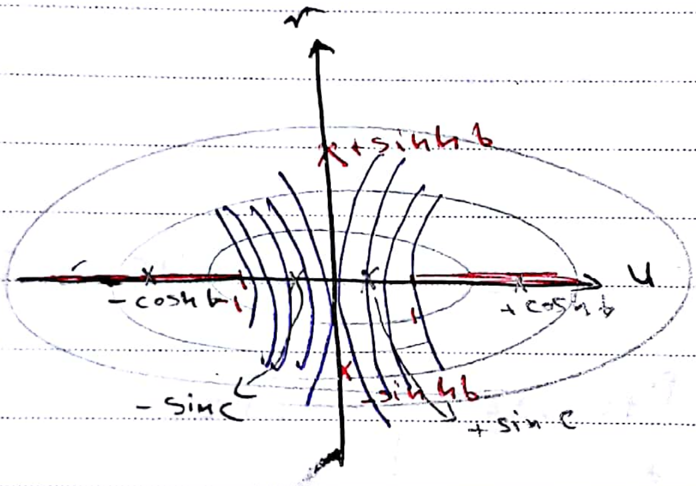
$u = \sin c \cosh y \quad , \quad v = \cos c \sinh y$

داریم : $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

$$\downarrow$$

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1 \quad \text{هذلولی}$$

کانون ها : $\pm \sqrt{\sin^2 c + \cos^2 c} = \pm 1$



خطوط افقی $y = b$: $u = \sin x \cosh b \quad , \quad v = \cos x \sinh b$

داریم : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

بیضی : $\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$

کانون ها $\pm \sqrt{\cosh^2 b - \sinh^2 b} = \pm 1$

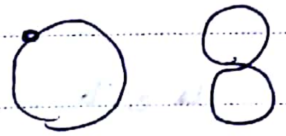
محور x : $y = 0 \longrightarrow u = \sin x \cosh 0 \quad , \quad v = \cos x \sinh 0 = 0$

$-1 \leq \sin x \leq +1$

$-1 \leq u \leq +1$

انتگرال مختلط :

می خواهیم از تابع مختلط $f(z)$ در امتداد خم C انتگرال بگیریم یا $\int_C f(z)dz$ را محاسبه کنیم. C را خم بسته گوییم هرگاه ابتدا و انتهای آن روی هم قرار گیرند

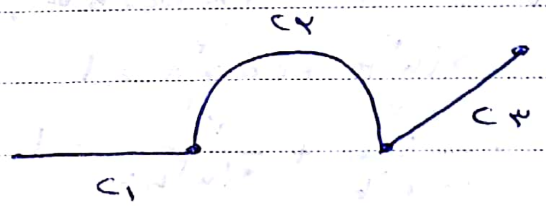


اگر C یک خم بسته باشد، انتگرال را با این فرم نشان می دهیم:

$$\oint f(z)\,dz$$

اگر $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ در این صورت :

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz$$



معادله‌ی پارامتری خم C : $C: z(t)=x(t)+iy(t)$ ؛ خم C را هموار گوییم هرگاه مشتق پیوسته داشته باشیم. ($z'(t)$ پیوسته باشد.)

قضیه: فرض کنیم C یک خم هموار با معادله‌ی پارامتر $a \le t \le b$ و $z(t)=x(t)+iy(t)$ باشد و $f(z)$ یک تابع مختلط پیوسته باشد در این صورت :

Subject
Date

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t=a}^{b} f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$$

پارامتری کردن خم: اگر خم C به فرم $y=f(x)$ باشد در نظر می‌گیریم:

$y=f(t)$, $x=t$

$z(t)=x(t)+iy(t)=t+if(t)$

مثال) C قسمتی از خم $y=\sqrt{x}$ از $x=0$ تا $x=1$ است.

$x=t$, $y=\sqrt{t}$

$z(t)=t+i\sqrt{t}$, $0\leq t\leq 1$

* اگر C پاره خطی از نقطه (x_0,y_0) تا نقطه (x_1,y_1) باشد:

$x(t)=x_0+(x_1-x_0)t$

$y(t)=y_0+(y_1-y_0)t$ $\quad 0\leq t\leq 1$

* اگر C دایره به شعاع r باشد:

$x(t)=r\cos t$ $\quad y(t)=r\sin t$ $\quad 0\leq t\leq 2\pi$

مثال) C: پاره خطی از i تا $2-i$ است. $\int_C \mathrm{Re}(z)\,dz \Rightarrow$

$i \to 0+1i$

$0\leq t\leq 1$

$x(t)=0+2t$

$y(t)=1-2t$

$z(t)=2t+i(1-2t)$; $0\leq t\leq 1$

$z'(t)=2+i(-2)$

$$=\int_{t=0}^{1}\mathrm{Re}(z(t))\cdot z'(t)\,dt=\int_0^1 2t\cdot(2-2i)\,dt$$

$$=(2-2i)\int_0^1 2t\,dt$$

$$=(2-2i)\left[t^2\right]_0^1=2-2i$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال)

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2}\,dz = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{[z(t)]^2}\,z'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}\,dt}{(2e^{it})^2} \Rightarrow$$

$z(t) = 2\cos t + i2\sin t = 2e^{it}$ $0 \le t \le 2\pi$

$z'(t) = -2\sin t + i2\cos t = 2ie^{it}$

$$\Rightarrow \frac{2i}{4}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{2it}}\,dt = \frac{1}{2}i\int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt = \frac{1}{2}i\left(-\frac{1}{i}\right)\left[e^{-it}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi i} - e^{0}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos 2\pi - 1\right)$$

مثال)

$$\int_C (xy - 2i)\,dz = \int_0^1 \left(((3t)(-t)) - 2i\right)\cdot(3+i)\,dt$$

C: خط واصل بین $A(0,0)$ و $B(3,-1)$

$$= (3+i)\int_0^1 -3t^2 - 2i\,dt$$

$x(t) = 0 + 3t = 3t$

$y(t) = 0 + (-1)t = -t$

$$= (3+i)\left(\int_0^1 -3t^2\,dt - \int_0^1 2i\,dt\right)$$

$Z(t) = 3t + it$

$Z'(t) = 3 + i$

$$(3+i)(-1-2i) = -3-6i-i+2$$

$$= -1-7i$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

قضیه: فرض کنیم تابع $f(z)$ پیوسته باشد و تابع تحلیلی مثل $F(z)$ وجود داشته باشد که $F'(z)=F(z)$ در این صورت:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

مثال: $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\,dz = \sin z \Big]_{-\pi i}^{\pi i} = \sin(\pi i) - \sin(-\pi i)$

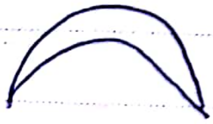
$= \sin(\pi i) + \sin(\pi i)$

$= 2\sin(\pi i) = 2i\sinh\pi$

مثال: $\int_{0}^{1-i} z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big]_{z=0}^{1-i} = \frac{(1-i)^3}{3}$

قضیه کوشی: فرض کنیم تابع $f(z)$ در ناحیه همبند D تحلیلی باشد در این صورت برای هر خم ساده‌ی بسته‌ی C در D داریم: $\oint_C f(z)\,dz = 0$

خم بسته ساده: خم بسته‌ای که نه خودش را قطع کند و نه بر خودش مماس باشه



ناحیه همبند ساده: ناحیه‌ی داخل خم بسته‌ای ساده است

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

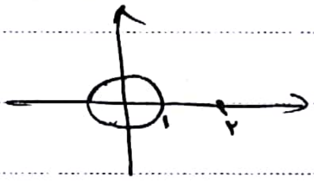
Date

مثال) $\oint_{|z|=2} e^{z}\, dz = 0$

$\oint_{|z|=1} \cos z \; dz = 0$

$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\, dz$ از قضیه نمی‌توان استفاده کرد

$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z-2} = 0$



$\oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz$ چون $\bar{z}$ تحلیلی نیست
از قضیه نمی‌توان استفاده کرد.

فرمول انتگرال کوشی: فرض کنیم تابع $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد و یک خم بسته در D شامل نقطه‌ی z_0 باشد آنگاه:

$$\oint_{c} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

مثال) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z-0}\, dz = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i$ ($0 \to z_0$)

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-\frac{\pi}{2})}\, dz = \oint \frac{\overbrace{\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}}^{f(z)}}{z-0}\, dz = 2\pi i\, \frac{\overset{1}{\cos 0}}{0-\frac{\pi}{2}} = -4i$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

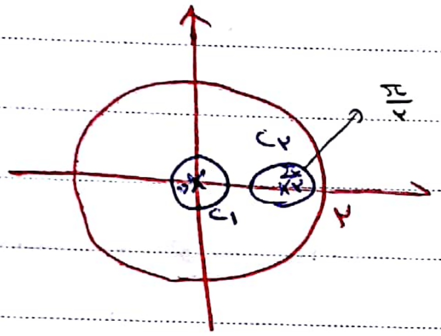
$$* \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = 2\pi i \cos(\pi) = -2\pi i$$

کانتور: خم بسته ی ساده

$$* \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z(z-\frac{\pi}{2})}\,dz = \oint_{C_1} \frac{\overbrace{\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}}^{f}}{z-0}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\overbrace{\frac{\cos z}{z}}^{g}}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz$$

C_1: کانتور به مرکز ۰

C_2: کانتور به مرکز $\frac{\pi}{2}$



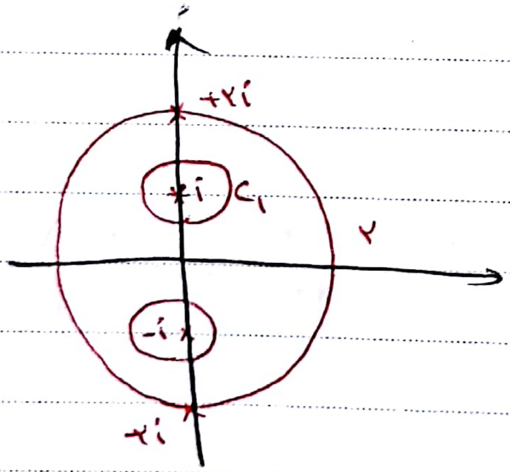
$$= 2\pi i f(0) + 2\pi i g(\tfrac{\pi}{2})$$

$$= 2\pi i \frac{\cos 0}{0-\frac{\pi}{2}} + 2\pi i \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$$

$$* \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz = \oint_{|z|} \frac{e^z}{(z-i)(z+i)}\,dz = \oint_{C_1} \frac{\overbrace{\frac{e^z}{z+i}}^{f}}{z-i}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\overbrace{\frac{e^z}{z-i}}^{g}}{z+i}\,dz$$

C_1: کانتور به مرکز i

C_2: کانتور به مرکز $-i$; $z-(-i)$



$$= 2\pi i f(i) + 2\pi i g(-i)$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i}}{i+i} + 2\pi i \frac{e^{-i}}{-i-i}$$

$$= \pi\underbrace{(e^{i} - e^{-i})}_{2i\sin 1}$$

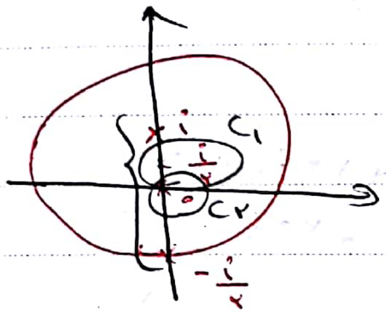
Subject
Date

$$\oint \frac{\cosh z}{z(z-\frac{i}{2})}\,dz = \oint_{C_1} \frac{\overbrace{\frac{\cosh z}{z}}^{f}}{z-\frac{i}{2}}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\overbrace{\frac{\cosh z}{z-\frac{i}{2}}}^{g}}{z}\,dz$$

$|z-i| = \frac{3}{2}$ C_1: کانتور به مرکز $\frac{i}{2}$ C_2: کانتور به مرکز 0

$$= 2\pi i f\left(\frac{i}{2}\right) + 2\pi i\, g(0)$$

$$f\left(\frac{i}{2}\right) \to \frac{\cosh \frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} \qquad g(0) \to \frac{\cosh 0}{-\frac{i}{2}}$$



مشتقات توابع تحلیلی:

داریم: $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$

$f(z)$ در C تحلیلی است و C شامل z_0

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{+1\, f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

$$f''(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{+2(z-z_0)f(z)}{(z-z_0)^4}\,dz = \frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

$$f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4}\,dz$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$\Rightarrow \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

f(z) داخل و روی خم C تحلیلی است و خم شامل نقطه‌ی z_0 است.

مثال) $\oint_{|z-\pi i|=\pi} \frac{\cos z}{(z-\pi i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(\pi i) = \pi i(-\cos \pi i) = -\pi i \cosh \pi$

(f ، $3 \to n+1$)

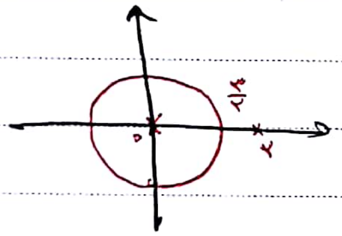
$f(z) = \cos z$

$f'(z) = -\sin z$

$f''(z) = -\cos z$

مثال) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z^3(z-2)}\,dz = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2} f''(0) = -\frac{\pi i}{4}$

($f(z)$ ، $z^3 \to (z-0)^3$ ، $n+1=3$ ، $f''(0)=\frac{-12}{16}$ ، $\frac{-12}{16}=-1$)



$f(z) = \frac{e^z}{z-2}$

$f'(z) = \frac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2} = \frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}$

$f''(z) = \frac{(e^z(z-3)+e^z)(z-2)^2 - 2(z-2)(z-3)e^z}{(z-2)^4}$

* $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^3(z-2)^2}\,dz = \oint_{|z-2|=1} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{(z-2)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1} f'(2)$

($f(z)$ ، $2 \to n+1$ ، z_0)

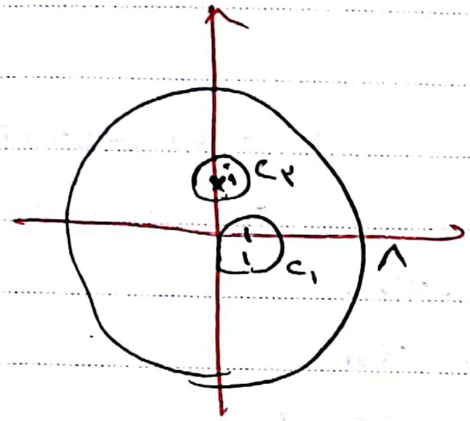
Scanned by CamScanner

Subject

Date

* $$\oint_{|z|=۸} \frac{۴z+۳}{(z-1)(z-i)^۲}\,dz = \oint_{c_1} \frac{\overbrace{\frac{۴z+۳}{(z-i)^۲}}^{f}}{z-1}\,dz + \oint_{c_2} \frac{\overbrace{\frac{۴z+۳}{z-1}}^{g}}{(z-i)^{۲ \to n+1}}\,dz$$

c_1: کانتور به مرکز ۱ — c_2: کانتور به مرکز i



$$= ۲\pi i\, f(1) + \frac{۲\pi i}{۱}\, g'(i)$$

$$= ۲\pi i \,\frac{۷}{(1-i)^۲} + ۲\pi i \cdot \frac{-۷}{(i-1)^۲}$$

$$= \frac{۲\pi i}{(1-i)^۲}(۷-۷) = ۰$$

$$g(z) = \frac{۴z+۳}{z-1}$$

$$g'(z) = \frac{۴(z-1)-۴z-۳}{(z-1)^۲} = \frac{-۷}{(z-1)^۲}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

سری های توانی :

سری توانی به مرکز z_0 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

همگرایی سری توانی ، در نظر بگیریم که $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$ یا $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = L$

- اگر $L=\infty$ در این صورت $R=\frac{1}{L}=0$ (شعاع همگرایی) پس سری فقط در $z=z_0$ همگراست .

- اگر $L=0$ در این صورت $R=\frac{1}{L}=+\infty$ (شعاع همگرایی) پس سری به ازای هر z مختلط همگراست .

- اگر $0<L<\infty$ در این صورت $R=\frac{1}{L}$ (شعاع همگرایی) پس سری برای $|z-z_0|<R$ همگراست

($|z-z_0|<R$: بازه همگرایی)

مثال)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n!} (z-i)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n\cdot 2}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)n!} = 0 = L \to R=\frac{1}{0}=+\infty \to$$ سری به ازای هر z همگراست

بسط تیلور : فرض کنیم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد در این صورت بسط

تیلور تابع $f(z)$ به مرکز z_0 عبارت است از :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!} + f'''(z_0)\frac{(z-z_0)^3}{3!} + \cdots$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اگر $z_0=0$ ، بسط مک لورن را داریم:

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+f''(0)\frac{z^2}{2!}+f'''(0)\frac{z^3}{3!}+\dots+f^{n}(0)\frac{z^n}{n!}+\dots$$

$\sin(0)+\cos(0)-\sin(0)\ \ -\cos(0)\ \ +\sin(0)\frac{z^4}{4!}+\cos(0)\frac{z^5}{5!}$

بسط مک لورن توابع مقدماتی:

$$f(z)=\sin z=0+1z-0\frac{z^2}{2}-1\frac{z^3}{3!}+0\frac{z^4}{4!}+1\frac{z^5}{5!}\pm\dots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}\pm\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\sinh z=-i\sin(iz)$$

$$=(-i)\left((iz)-\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^5}{5!}-\frac{(iz)^7}{7!}\pm\dots\right)$$

$$=-i^2z+i^4\frac{z^3}{3!}-i^6\frac{z^5}{5!}+i^8\frac{z^7}{7!}\pm\dots$$

$+1\quad +1\quad +1\quad +1$

$$=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}=\lim\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$=\lim\frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}=0=L\Rightarrow R=\frac{1}{L}=+\infty$$

پس سری به ازای هر z همگرا است.

Subject
Date

$f(z) = \cos z = \cos(0) - \sin(0)\, z - \cos(0)\frac{z^2}{2!} + \sin(0)\frac{z^3}{3!} + \cos(0)\frac{z^4}{4!} \pm \dots$

$\lim\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \frac{\frac{1}{[2(n+1)]!}}{\frac{1}{(2n)!}}$

$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n)}}{(2n)!} \Rightarrow$ به ازای هر z همگراست

$f(z) = \cosh z = \cos(iz) = 1 - \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} - \frac{(iz)^6}{6!} \pm \dots$

$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$

$f(z) = e^z = 1 + 1z + 1\frac{z^2}{2!} + 1\frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ به ازای هر z همگراست

* $f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$C_n = 1$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = 1 = L \rightarrow R = 1$

سری برای $|z| < 1$ همگراست
ناحیه همگرایی

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-z \\ \hline \mp 1 \pm z & 1 + z + z^2 + z^3 \\ \overline{\quad z} & \\ \mp z \pm z^2 & \\ \overline{\quad z^2} & \\ z^2 - z^3 & \\ \overline{\quad z^3} & \end{array}$$

* $f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + (-z)^2 + (-z)^3 + (-z)^4 + \dots$
$= 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$

$|z| < 1$
بازه همگرایی

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

* $f(z) = Ln(1+z) = \int \frac{1}{1+z}\,dz = \int (1 - z + z^{۲} - z^{۳} + z^{۴} \pm \dots)\,dz$

$= z - \frac{z^{۲}}{۲} + \frac{z^{۳}}{۳} - \frac{z^{۴}}{۴} + \frac{z^{۵}}{۵} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{z^{n+1}}{n+1}$

* $f(z) = \frac{1}{1+z^{۲}} = 1 - z^{۲} + (z^{۲})^{۲} - (z^{۲})^{۳} + (z^{۲})^{۴} \pm \dots$

* $f(z) = tg^{-1} z = \int \frac{1}{1+z^{۲}}\,dz = \int (1 - z^{۲} + z^{۴} - z^{۶} + z^{۸} \pm \dots)\,dz$

$= z - \frac{z^{۳}}{۳} + \frac{z^{۵}}{۵} - \frac{z^{۷}}{۷} + \frac{z^{۹}}{۹} \pm \dots$

* $f(z) = \frac{1}{۲z+۳} = \frac{1}{۳(1 + \frac{۲}{۳}z)}$ $\quad$ $۲z+۲+1$

شعاع همگرایی: $|\frac{۲}{۳} z| < 1$

$|z| < \frac{۳}{۲}$

$= \frac{1}{۳} \cdot \frac{1}{1 + \frac{۲}{۳}z} = \frac{1}{۳}\left(1 - \frac{۲}{۳}z + (\frac{۲}{۳}z^{۲}) - (\frac{۲}{۳}z)^{۳} \pm \dots\right)$

$= \frac{1}{۳} - \frac{۲}{۳^{۲}} z + \frac{۲^{۲}}{۳^{۳}} z^{۲} - \frac{۲^{۳}}{۳^{۴}} z^{۳} \pm \dots$

* $f(z) = \frac{z}{z-۴} = \frac{z}{-۴(1 - \frac{z}{۴})} = \frac{-z}{۴} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{۴}}$

$= \frac{-z}{۴}\left(1 + \frac{z}{۴} + (\frac{z}{۴})^{۲} + (\frac{z}{۴})^{۳} + \dots\right)$

$= \frac{-z}{۴} - (\frac{z}{۴})^{۲} - (\frac{z}{۴})^{۳} - (\frac{z}{۴})^{۴} \dots$

$|\frac{z}{۴}| < 1$ ناحیه همگرایی

Subject
Date

بسط تیلور توابع (به مرکز $z_0 \neq 0$):

در نظر می‌گیریم: $t = z - z_0$

سپس بسط مک لورن به مرکز $t = 0$ را به دست می‌آوریم.

مثال) $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ بسط تیلور به مرکز $z_0 = -i$ ؟

$t = z - z_0$

$t = z + i \rightarrow z = t - i$

$$f(z) = \frac{1}{z+2i} = \frac{1}{t-i+2i} = \frac{1}{t+i} = \frac{1}{i(1+\frac{t}{i})} = (-i)\frac{1}{1-it}$$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$

$$= (-i)(1 + it + (it)^2 + (it)^3 + \dots)$$

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 \pm \dots$

$$= -i + t + it^2 - t^3 - it^4 \pm \dots$$

$$= -i + (z+i) + i(z+i)^2 - (z+i)^3 - i(z+i)^4 \pm \dots$$

بسط دوجمله‌ای $(1+z)^k = 1 + kz + \frac{k(k-1)}{2}z^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}z^3 + \dots$ ، $k > 0$

مثال) بسط $f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}$ به مرکز $z_0 = 1$ ؟

$t = z - z_0$

$t = z - 1 \rightarrow z = t + 1$

$z + 2 = t + 3$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{(t+3)^2} = (t+3)^{-2}$$

$$= (3(1+\frac{t}{3}))^{-2} = 3^{-2}(1+\frac{t}{3})^{-2}$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - 2\frac{t}{3} + \frac{(-2)(-3)}{2}\left(\frac{t}{3}\right)^2 - \frac{2\times3\times4}{3!}\left(\frac{t}{3}\right)^3 \pm \dots\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - 2\frac{z-1}{3} + \frac{2\times3}{2}\left(\frac{z-1}{3}\right)^2 - \frac{2\times3\times4}{3!}\left(\frac{z-1}{3}\right)^3 \pm \dots\right)$$

در بسط مک لورن $\frac{1}{1-z}$:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

بازه‌ی همگرایی $|z|<1$ می‌باشد

می‌خواهیم بسطی از $\frac{1}{1-z}$ را بدست آوریم که بازه‌ی همگرایی آن $|z|>1$ باشد.

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(-z)(1-\frac{1}{z})} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$= \frac{-1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{-1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n}$$

* بسط‌هایی که داشتیم به مرکز نقطه‌ای مثل z_0 بودند که تابع $f(z)$ در آن نقطه تحلیلی است. اگر بخواهیم بسط تابع $f(z)$ به مرکز نقطه‌ای را به دست آوریم که تابع در آن تحلیلی نیست آن را بسط لوران می‌نامیم.

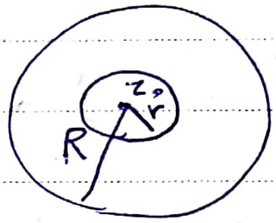
Scanned by CamScanner

Subject
Date

قضیه لوران: فرض کنیم تابع $f(z)$ در ناحیه $\overset{D}{\overbrace{r < |z - z_0| < R}}$ تحلیلی باشد

در این صورت به طور منحصر به فردی آن را می توانیم با سری لوران زیر نمایش دهیم:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$



که

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

C: خم بسته در D

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z-z_0)^{n-1} dz$$

C: خم بسته در D

* برای بدست آوردن ضرایب a_n و b_n از فرمول های انتگرال استفاده نمی کنیم.

چون سری منحصر به فرد است، این ضرایب را می توانیم از روش های دیگر بدست آوریم.

مثال) سری لوران $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$ به مرکز $z=0$ ؟

بسط $\cos z$ به مرکز $z=0$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \dots$$

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} \pm \dots$$

Subject
Date

مثال (امتحان بهمن ۹۴) : سری لوران تابع $(z^2+1)\,e^{-\frac{1}{z}}$ بمرکز $z=0$ را

بنویسید. می دانیم: $e^{z}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$

$$e^{-\frac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{(-\frac{1}{z})^2}{2!}+\frac{(-\frac{1}{z})^3}{3!}+\frac{(-\frac{1}{z})^4}{4!}\pm\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}\pm\cdots$$

$$(z^2+1)e^{-\frac{1}{z}}=(z^2+1)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}\pm\cdots\right)$$

$$=z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}\pm\cdots$$

مثال (خرداد ۹۴) سری لوران $f(z)=\frac{e^z}{1-z}$ را با مرکز صفر در ناحیه ی همگرایی

$|z|>1$ بنویسید.

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cdot e^{z}$$

$\left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(-z)(1-\frac{1}{z})}=\frac{-1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

$$=\frac{-1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right)$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cdot e^z=\left(\frac{-1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\cdots\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{z}-1-\frac{z}{2!}-\frac{z^2}{3!}-\cdots-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}-\cdots$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) سری لوران تابع $f(z)=\frac{z}{z^2+z-2}$ را در ناحیه های همگرایی زیر بدست آورید

الف) $|z|<1$

ب) $|z-1|<1$

ج) $|z-1|>3$

$\frac{1}{3}(z+2)(z-1)$

$$f(z)=\frac{z}{(z+2)(z-1)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-1}$$

$A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{z+2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{z-1}$$

الف) $|z|<1$: $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right)$

$|\frac{z}{2}|<|z|<1$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+(\frac{z}{2})^2-(\frac{z}{2})^3\pm\dots\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{1-z}=(-1)\frac{1}{1-z}=(-1)(1+z+z^2+z^3+\dots) \quad (2)$$

$|z|<1$

$$f(z)=\frac{2}{3}(1)+\frac{1}{3}(2)$$

ب) $|z-1|<1$: $z-1=t \rightarrow z=t+1$

$|t|<1$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3(1+\frac{t}{3})}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{t}{3}+(\frac{t}{3})^2-(\frac{t}{3})^3\pm\dots\right)$$

$|\frac{t}{3}|<|t|<1$

$$=\frac{1}{3}-\frac{(z-1)}{3^2}+\frac{(z-1)^2}{3^3}-\frac{(z-1)^3}{3^4}\pm\dots \quad (1)$$

$$f(z)=\frac{2}{3}(1)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

ج) $|z-1|>3$ $\qquad t=z-1 \to z=t+1$

$|t|>3$

$1>\frac{3}{|t|}$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}=\frac{1}{t(1+\frac{3}{t})}=\frac{1}{t}\times\frac{1}{1+\frac{3}{t}}=\frac{1}{t}\left(1-\frac{3}{t}+\left(\frac{3}{t}\right)^2-\left(\frac{3}{t}\right)^3\pm\dots\right)$$

$\left|\frac{3}{t}\right|<1$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{3^2}{(z-1)^3}-\frac{3^3}{(z-1)^4}\pm\dots \quad (1)$$

$$f(z)=\frac{2}{3}(1)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{z-1}$$

$1>\frac{2}{|z|}$

مثال (خرداد ۹۵) سری بمرکز صفر برای $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$ را در $2<|z|$ بیابید.

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}$$

$A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{z+2}$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}=\frac{1}{z}\times\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right) \quad (1)$$

$\left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}=\frac{1}{z}\times\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\frac{2^3}{z^3}\pm\dots\right) \quad (2)$$

$\left|\frac{2}{z}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{3}(1)-\frac{1}{3}(2)$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

حساب مانده ها:

تعریف: z_0 را صفر تابع $f(z)$ گوییم هرگاه $f(z_0)=0$

(z_0 ریشه ی معادله ی $f(z)=0$ است)

z_0 را صفر مرتبه ۱ (صفر ساده) تابع $f(z)$ گوییم هرگاه $f(z_0)=0$ ولی $f'(z_0)\neq 0$

z_0 را صفر مرتبه ۲ (صفر ساده) تابع $f(z)$ گوییم هرگاه $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=0$ ولی $f''(z_0)\neq 0$

⋮

z_0 را صفر مرتبه m برای $m\geq 2$ تابع $f(z)$ (صفر ساده) گوییم هرگاه $f(z_0)=0$ و $f'(z_0)=0$ و ... و $f^{(m-1)}(z_0)=0$ ولی $f^{m}(z_0)\neq 0$

مثال) $f(z)=(z-b)^3$ $z_0=b$ صفر مرتبه سوم است زیرا $f(b)=0$

$$f'(z)=3(z-b)^2 \rightarrow f'(b)=0$$
$$f''(z)=6(z-b) \rightarrow f''(b)=0$$
$$f'''(z)=6 \longrightarrow f'''(b)\neq 0$$

مثال) صفرهای $\sin z$ ؟

$$\sin z=0 \rightarrow z=k\pi$$

مثال) صفرهای $\sinh z$ ؟

$$\sinh z=-i\sin(iz)=0$$
$$\sin(iz)=0$$
$$iz=k\pi \rightarrow z=\frac{1}{i}k\pi$$

صفرهای ساده: $z=-ik\pi$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

فرض کنیم $f(z)$ در z_0 دارای صفر مرتبه m باشد و $g(z)$ در z_0 دارای صفر مرتبه n باشد $(m < n)$ در این صورت:

- $Af(z) + Bg(z)$ در z_0 دارای صفر مرتبه m است

و

- $f(z) \cdot g(z)$ در z_0 دارای صفر مرتبه $m+n$ است.

مثال) صفرهای $h(z) = (z^2 + \pi^2) \sinh z$:

$z^2 + \pi^2 = 0 \rightarrow z^2 = -\pi^2 \rightarrow z = \pm \pi i$ صفرهای مرتبه ۱ برای $z^2 + \pi^2$

$z = -i k\pi$ ، صفرهای مرتبه ۱ برای $\sinh z$.

پس $z = \pm \pi i$ صفرهای مرتبه ۲ برای $h(z)$ هستند

و $z = i k\pi$ $(k \neq \pm 1)$ صفرهای مرتبه ۱ برای $h(z)$ هستند.

نقطه منفرد: نقطه‌ای است که تابع در آن نقطه تحلیلی نیست (یا اصلاً تعریف نشده) ولی هر همسایگی آن شامل نقاطی است که تابع در آن تحلیلی است.

دیدیم که برای نقاط منفرد مثل z_0 سری لوران به مرکز z_0 وجود دارد مثل:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

نوع نقطه‌ی منفرد z_0 :

* اگر در بسط لوران تابع به مرکز z_0 قسمت اصلی دارای تعداد متناهی جمله باشد یا

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

z_0 را قطب تابع $f(z)$ و m را مرتبه‌ی قطب می‌نامیم.

* اگر در بسط لوران تابع به مرکز z_0 قسمت اصلی تعداد نامتناهی جمله داشته باشد:

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)}+\frac{b_3}{(z-z_0)^3}+\cdots$$

z_0 را نقطه‌ی منفرد اساسی می‌گوییم

* اگر در بسط لوران تابع به مرکز z_0، قسمت اصلی هیچ جمله‌ای نداشته باشد z_0 را

نقطه‌ی منفرد برطرف شدنی می‌نامیم.

مثال) در توابع زیر نقاط منفرد و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}\pm\cdots$$

نقطه‌ی منفرد: $z=0$

$$1-\cos z=1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}\pm\cdots\right)$$

$$=+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}\pm\cdots$$

$$\frac{1-\cos z}{z^3}=\frac{1}{2!\,z}-\frac{z}{4!}+\frac{z^3}{6!}\pm\cdots$$

$z=0$ قطب مرتبه‌ی ۱ است

* $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ $\quad$ $z=0$ نقطه‌ی منفرد

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

$$ze^{\frac{1}{z}} = z + 1 + \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{3!\,z} + \cdots$$

$z=0$ نقطه‌ی منفرد اساسی است.

* $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ $\quad$ $z=0$ نقطه‌ی منفرد.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

$z=0$ نقطه‌ی منفرد برطرف شدنی است.

روش دیگر برای تعیین نوع نقطه‌ی منفرد:

اگر تابع $f(z)$ در z_0 دارای صفر مرتبه m باشد آنگاه $\frac{1}{f(z)}$ در z_0 دارای قطب مرتبه m است.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ آ $z=\pm i$ صفرهای مرتبه ۳ برای مخرج هستند
پس قطب های مرتبه ۳ برای کسر می باشند

فرض کنیم $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ و $f(z)$ در z_0 دارای صفر مرتبه m باشد و $g(z)$ در z_0 دارای صفر مرتبه n باشد.

۲ نکته:

* اگر $m<n$ ، $h(z)$ در z_0 دارای قطب مرتبه $n-m$ است

* اگر $m\geq n$ ، $h(z)$ در z_0 دارای نقطه ی منفرد برطرف شدنی است.

مثال) نوع نقطه ی منفرد در $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}$ ؟

($z=0$ صفر مرتبه ۲ برای صورت)
($z=0$ صفر مرتبه ۳ برای مخرج)

پس $z=0$ قطب مرتبه ۱ برای $f(z)$ است.

مثال) $z=0$ نقطه ی منفرد برطرف شدنی برای $h(z)$ است

$h(z)=\frac{e^{z^2}-1}{z^2}$

($z=0$ صفر مرتبه ۲ برای صورت)
($z=0$ صفر مرتبه ۲ برای مخرج)

$f(z)=e^{z^2}-1 \to f(0)=0$

$f'(z)=2ze^{z^2} \to f'(0)=0$

$f''(z)=2e^{z^2}+4z^2e^{z^2} \to f''(0)\neq 0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) نوع نقطه‌ی منفرد $f(z) = \frac{\sinh \pi z}{(z^2+1)^2}$

$z = \pm i$ صفرهای مرتبه ۲ برای مخرج

$z^2 + 1 = 0 \rightarrow z = \pm i$

$\sinh(\pi z) = -i \sin(\pi i z) = 0$

$\pi i z = k\pi$

صفرهای ساده صورت : $z = -ik$

$\Rightarrow$ $z = \pm i$ قطب‌های مرتبه ۱ برای $f(z)$

اگر z_0 نقطه منفرد تابع $f(z)$ باشد.

ماندهٔ تابع $f(z)$ در z_0 : ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع به مرکز z_0 می‌باشد

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)$$

بسط لوران به مرکز z_0: $f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots$

داشتیم : $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int f(z)(z-z_0)^{n-1} dz$

$n=1 : b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz \Rightarrow \int f(z)\, dz = 2\pi i\, b_1$

c : شامل z_0 c : شامل نقطه z ← نقاط منفرد تابع $f(z)$ $b_1 = \underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)$

Subject
Date

مثال) مانده ی تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$ در نقطه ی $z_0=0$ را بدست آورید

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\, dz = 2\pi i\, b_1$$

$b_1 = \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{-1}{3!}$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots$$

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{z}{z^4} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{z}{5!} \pm \cdots$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} = \frac{-1}{3!} = \frac{-1}{6}$$

مثال) $\oint z e^{\frac{1}{z}}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$

$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}$

$= \pi i$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

$$z e^{\frac{1}{z}} = z + 1 + \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{3!\,z^2} + \cdots$$

روش دیگر برای بدست آوردن مانده در z_0 :

* اگر نقطه z_0 قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ باشد :

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

با ضرب طرفین رابطه در $z-z_0$ داریم :

$$f(z)(z-z_0) = a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \cdots + b_1$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

Subject
Date

* اگر نقطه z_0 قطب مرتبه دوم تابع $f(z)$ باشد:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2}$$

با ضرب طرفین رابطه در $(z-z_0)^2$ داریم:

$$f(z)(z-z_0)^2 = a_0(z-z_0)^2 + a_1(z-z_0)^3 + \dots + b_1(z-z_0) + b_2$$

$$\left(f(z)(z-z_0)^2\right)' = 2a_0(z-z_0) + 3a_1(z-z_0)^2 + \dots + b_1$$

$$\lim_{z \to z_0} \left(f(z)(z-z_0)^2\right)' = b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

* اگر z_0 قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ باشد:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)$$

* اگر z_0 قطب مرتبه دوم تابع $f(z)$ باشد:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(f(z)(z-z_0)^2\right)'$$

* اگر z_0 قطب مرتبه بالا از ۲ باشد
یا
z_0 نقطه‌ی منفرد اساسی باشد
← ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران به مرکز z_0

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \text{ضریب } \frac{1}{z-z_0}$$

* اگر z_0 نقطه منفرد برطرف شدنی باشد:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$$

Subject
Date

قضیه مانده ها: درصورتی که تابع $f(z)$ در داخل و روی خم بسته ی C دارای نقاط منفرد z_1 و z_2 و ... و z_m باشد:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\underset{z=z_1}{\text{Res}} f(z) + \underset{z=z_2}{\text{Res}} f(z) + \dots + \underset{z=z_m}{\text{Res}} f(z) \right)$$

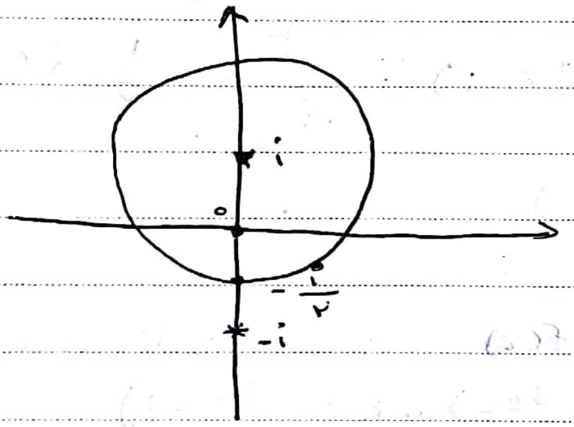
EXM: مثال)

$$\oint \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \left(\underset{z=0}{\text{Res}} f(z) + \underset{z=+i}{\text{Res}} f(z) \right)$$

$|z-.i| = \frac{3}{2}$

نقاط منفرد: $z=\pm i$ و $z=0$

ولی نقاط $z=0$ و $z=+i$ داخل دایره قرار دارند



$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1} = \frac{1}{z^2+1} \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \dots$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2+1} e^{\frac{1}{z}} = (1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \dots)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} + \dots\right)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots+z^2-z-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!z}\pm\dots$$

$$+z^3+z^3+\frac{z^2}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!z}+\dots$$

$$\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}\pm\dots\right)\frac{1}{z}$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z)=\sin 1$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}\pm\dots$$

$z=+i$ قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ است $\rightarrow \operatorname{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i} f(z)(z-i)$

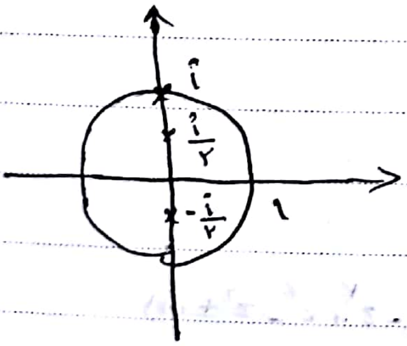
$$=\lim_{z\to i}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}(z-i)=\frac{e^{\frac{1}{i}}}{2i}=\frac{-1}{2}ie^{-i}$$

$z^2+1=(z-i)(z+i)$

$$\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{4z^2+1}\,dz$$

مثال امتحان ۱۴/۱۰/۹۵ :

$$=2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=+\frac{i}{2}} f(z)+\operatorname{Res}_{z=-\frac{i}{2}} f(z)\right)$$



$$4z^2+1=0\rightarrow z^2=\frac{-1}{4}\rightarrow z=\pm\frac{i}{2}$$

$z=+\frac{i}{2}$ قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ است $\rightarrow \operatorname{Res}_{z=+\frac{i}{2}} f(z)=\lim_{z\to\frac{i}{2}} f(z)\left(z-\frac{i}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{z^2+1}{4z^2+1}\left(z-\frac{i}{2}\right)$

$4z^2+1=4\left(z-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{i}{2}\right)$

$z^2+4=0\rightarrow z=\pm 2i$

$z^2+4=(z-2i)(z+2i)$

$f(z)=az^2+bz+c=0$

$z=z_1,\ z=z_2$

$f(z)=a(z-z_1)(z-z_2)$

$$=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{z^2+1}{4\left(z+\frac{i}{2}\right)}=\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^2+1}{4(i)}=\frac{\frac{3}{4}}{4i}=\frac{3}{16i}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

قطب مرتبه اول $z = -\frac{i}{2}$ $\rightarrow \operatorname{Res}_{z=-\frac{i}{2}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{i}{2}} f(z)(z+\frac{i}{2}) = \lim_{z\to -\frac{i}{2}} \frac{z^2+1}{4(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})}(z+\frac{i}{2})$

$= \frac{(-\frac{i}{2})^2+1}{4(-i)} = \frac{-\frac{1}{4}+1}{4(-i)} = \frac{3}{16}i$

امتحان ۱۷، ۰۳، ۹۶)

$\oint_{|z|=2} (z^3+z^2-1)\sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\,(\operatorname{Res}_{z=0} f(z))$

$z=0$ نقطه‌ی منفرد اساسی داخل دایره

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$

$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} \pm \dots$

$f(z) = (z^4+z^2-1)\sin\frac{1}{z} = (z^4+z^2-1)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} \pm \dots\right)$

$= z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} \pm \dots + z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} \pm \dots + \frac{-1}{z} + \frac{1}{3!z^3} - \frac{1}{5!z^5} \pm \dots$

$\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!} - 1\right)\frac{1}{z}$

$\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{6} - 1\right) = \frac{1}{5!} - \frac{7}{6}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

امتحان ۹۶/۳/۱۷

$$* \oint_{|z|=8} \frac{4z+3}{(z-1)(z-i)^2}\, dz = 2\pi i \left(\underset{z=1}{\text{Res}}\, f(z) + \underset{z=i}{\text{Res}}\, f(z) \right)$$

دو نقطه منفرد $z=1$ و $z=i$ هر دو در دایره $|z|=8$ قرار دارند

قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ است $z=1 \rightarrow \underset{z=1}{\text{Res}}\, f(z) = \lim_{z\to 1} f(z)(z-1)$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{4z+3}{(z-1)(z-i)^2}(z-1) = \frac{7}{(1-i)^2} = \frac{7}{1-1-2i} = \frac{7}{2} i$$

قطب مرتبه دوم تابع $f(z)$ است $z=i \rightarrow \underset{z=i}{\text{Res}}\, f(z) = \lim_{z\to i} \left(f(z)(z-i)^2 \right)'$

$$= \lim_{z\to i} \left(\frac{4z+3}{(z-1)(z-i)^2} \cdot (z-i)^2 \right)' = \lim_{z\to i} \left(\frac{4z+3}{z-1} \right)' = \lim_{z\to i} \frac{4z-4-4z-3}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{-7}{(i-1)^2} = \frac{-7}{-2i} = \frac{-7}{-2i} = \frac{-7}{2} i$$

$$* \oint \frac{\tan z}{z^2 - \pi z}\, dz = 2\pi i \left(\underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z) + \underset{z=\pi}{\text{Res}}\, f(z) \right)$$

$z^2 - \pi z \rightarrow z(z-\pi) = 0 \rightarrow z=0$ ✓, $z=\pi$ ✓

$|2z-\pi| = \pi+1$

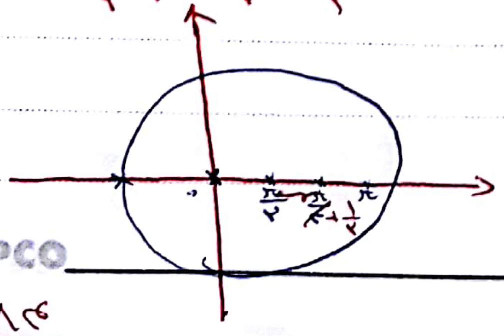
نقاط منفرد برطرف شدنی $z=0$ و $z=\pi$ هر دو داخل دایره C قرار دارد.

$2\left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \pi + 1$

$\left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

$C: |z| = 2$

$\left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 2 \rightarrow \frac{i}{2}$ داخل دایره C



PAPCO

Subject
Date

محاسبه بعضی از انتگرال های حقیقی با استفاده از انتگرال های مختلط:

I) $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$

در نظر می‌گیریم: $z = e^{i\theta} \longrightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

با تغییر θ از ۰ تا ۲π دایره $|z|=1$ یک دور پیموده می‌شود.

$$\int_0^{2\pi} \longrightarrow \oint_{|z|=1}$$

مثال)
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} - \sin\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{5}{4} - \frac{z^2-1}{2iz}} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{10iz - 4z^2 + 4}{8iz}}$$

$$= 8\oint_{|z|=1} \frac{1}{-4z^2 + 10iz + 4}\, dz = 8 * 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=\frac{i}{2}} f(z) \right) = \frac{32}{3}i$$

$$-4z^2 + 10iz + 4 = 0$$

$$z = \frac{-5i \pm \sqrt{(5i)^2 + 16}}{-4} = \frac{-5i \pm 3i}{-4} \quad z_1 = 2i, \quad z_2 = \frac{i}{2}$$

$\frac{i}{2}$ قطب ساده تابع $f(z)$ $\rightarrow \operatorname{Res}_{z=\frac{i}{2}} f(z) = \lim_{z \to \frac{i}{2}} f(z)(z - \frac{i}{2})$

$f(z) = 0 \rightarrow \begin{cases} z = z_1 \\ z = z_2 \end{cases}$ $\quad (z - z_1)(z - z_2)$

$$= \lim_{z \to \frac{i}{2}} \frac{1}{(z-2i)(z-\frac{i}{2})}(z - \frac{i}{2}) = \frac{1}{(\frac{i}{2} - 2i)} = \frac{1}{-\frac{3}{2}i} = \frac{2}{3}i$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال ۱) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+2\cos\theta} = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{3+2\frac{z^2+1}{2z}}$

$= \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{3z+z^2+1}{z}} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+3z+1}$ $\quad c: |z|=1$

$z = \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}$

$z_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \notin c$

$z_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \in c : |z|=1$

$= \frac{1}{2i}\, 2\pi i\, (\text{Res} f(z))$

$= \pi \lim_{z\to z_2} f(z)(z-z_2) = \pi \lim_{z\to z_2}\frac{1}{z-z_1}$

II $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \Leftarrow$

که $f(x) = \frac{P_n(x)}{q_m(x)}$) $f(x)$ تابع گویایی است که درجه‌ی چند جمله‌ای مخرج
$m \geq n+2$
حداقل ۲ تا از درجه چند جمله‌ای صورت بیشتر است) متناظر با $f(x)$ (x حقیقی)،

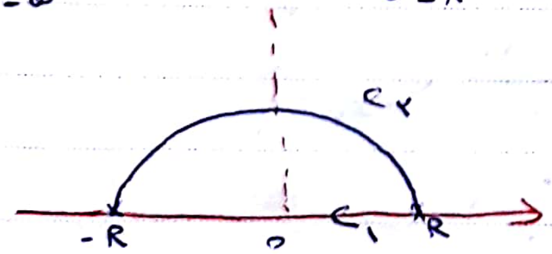
تابع $f(z)$ (z مختلط) را درنظر می‌گیریم.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$

خم را به صورت $c = c_1 \cup c_2$ درنظر می‌گیریم

c_1: پاره خط از $-R$ تا R است

c_2: نیم دایره بالایی دایره به شعاع R است



PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1=-R} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz \to 0$$

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{z=z_k} \operatorname{Res} f(z) \right)$$

C: خط حقیقی + نیم دایره بالایی دایره به شعاع ∞

z_k: نقاط منفرد تابع $f(z)$ واقع بر روی خط حقیقی یا بالای خط حقیقی

مثال)
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=+i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=+2i} f(z) \right)$$

C: روی و بالای خط حقیقی

$z=\pm 2i$ ، $z=\pm i$

نقاط منفرد تابع زیر انتگرال

ولی فقط $z=+i$ و $z=+2i$ بالای خط حقیقی قرار دارند

$z=+i$ قطب مرتبه اول $f(z)$ است $\rightarrow \operatorname*{Res}_{z=+i} f(z) = \lim_{z\to i} f(z)(z-i)$

$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{(z^2+4)\underbrace{(z^2+1)}_{(z-i)(z+i)}} (z-i)$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{(z^2+4)(z+i)} = \frac{1}{(i^2+4)(2i)} = \frac{1}{6i}$$

$$= -\frac{1}{6} i$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

قطب ساده ی $f(z)$ است $z=+2i \rightarrow \underset{z=2i}{\text{Res}}\, f(z) = \lim_{z\to 2i} f(z)(z-2i)$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{1}{\underbrace{(z^2+4)}_{(z-2i)(z+2i)}(z^2+1)}(z-2i)$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z+2i)(z^2+1)} = \frac{1}{(4i)((2i)^2+1)} = \frac{1}{-12i} = \frac{1}{12}i$$

د) $\int_0^{\infty} \frac{(2x^2-1)}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$

$$= \frac{1}{2}\int_C \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}dz = \frac{1}{2} * 2\pi i\left(\underset{z=+i}{\text{Res}}\, f(z) + \underset{z=+2i}{\text{Res}}\, f(z)\right)$$

$$z^4+5z^2+4=0$$

$$z^2 = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5\pm 3}{2} \quad \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$$

$$z^2=-4 \rightarrow \begin{cases} z_1=+2i \\ z_2=-2i \end{cases}$$

$$z^2=-1 \rightarrow \begin{cases} z_3=+i \\ z_4=-i \end{cases}$$

از این ۴ نقطه فقط $z=+i$ و $z=+2i$ بالای خط حقیقی قرار دارند

قطب مرتبه اول $f(z)$ $z=+i \rightarrow \underset{z=+i}{\text{Res}}\, f(z) = \lim_{z\to i} f(z)(z-i)$

$$= \lim_{z\to i} \frac{2z^2-1}{(z-2i)(z+2i)(z-i)(z+i)}(z-i)$$

$=$

P4PCO

Subject
Date

قطب مرتبه اول $f(z)$: $z=+2i \rightarrow \operatorname{Res}_{z=+2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} f(z)(z-2i)$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{2z^2-1}{(z-2i)(z+2i)(z-i)(z+i)}(z-2i)$$

امتحان ۱۶/۱۰/۹۵ :

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+25)^2}\,dx = \oint_C \frac{(z+1)^2}{(z^2+25)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=5i} f(z)$$

$$z^2+25=0 \rightarrow z=\pm 5i$$

$$(z^2+25)^2=0 \begin{cases} z_1=z_2=+5i \\ z_3=z_4=-5i \end{cases}$$

$z=+5i$ صفر مرتبه دوم مخرج و قطب مرتبه دوم تابع $f(z)$ است

$$\rightarrow \operatorname{Res}_{z=5i} f(z) = \lim_{z\to 5i}\left(f(z)(z-5i)^2\right)'$$

$$= \lim_{z\to 5i}\left(\frac{(z+1)^2}{(z^2+25)^2}(z-5i)^2\right)'$$

$$(z^2+25)^2 = (z-5i)^2(z+5i)^2$$

$$= \lim_{z\to 5i}\left(\frac{(z+1)^2}{(z+5i)^2}\right)' = \lim_{z\to 5i}\left(\frac{2(z+1)(z+5i)^2-2(z+5i)(z+1)^2}{(z+5i)^4}\right)$$

$$= \frac{2(5i+1)\overbrace{(10i)^2}^{-100} - 2(10i)\overbrace{(5i+1)^2}^{-25+1+10i}}{\underbrace{(10i)^4}_{10^4}}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

III) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \sin(mx) \\ \text{یا} \\ \cos(mx) \end{Bmatrix} dx$ ، $f(x)$ را به صورت کسر بنویسیم $\frac{P_n(x)}{q_m(x)}$ که $m \geq n+2$

$$e^{i(mx)} = \cos(mx) + i\sin(mx)$$

$$\rightarrow \cos mx = Re(e^{imx}) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx\, dx = Re\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)e^{imx})\, dx \quad (1)$$

$$\sin mx = Im(e^{imx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx\, dx = Im\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)e^{imx})\, dx \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow Re\int_C f(z)e^{imz}\, dz = Re\left(2\pi i\left(\sum_{z=z_k} Res\, f(z)e^{imz}\right)\right)$$

z_k: نقاط منفرد تابع $f(z)$ بالا یا روی خط حقیقی

$$(2) \Rightarrow Re\int f(z)e^{imz}\, dz = Im\left(2\pi i\left(\sum_{z=z_k} Res\, f(z)e^{imz}\right)\right)$$

مثال)

امتحان ۱۷، ۳، ۹۲)

$$* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+5x^2+4}\, dx = Im\int_C \frac{z e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\, dz = Im\left(2\pi i\left(\underbrace{Res_{z=i} f(z)e^{iz}}_{\frac{1}{6}e^{-1}} + \underbrace{Res_{z=+2i} f(z)e^{iz}}_{-\frac{1}{6}e^{-2}}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{6}\pi\left(e^{-1}-e^{-2}\right)$$

C: بالا و روی خط حقیقی

$$z^2 = \pm\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} \quad \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$$

$$z^2 = -4 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = +2i \rightarrow \text{بالای خط حقیقی} \\ \sout{z_2 = -2i} \end{cases}$$

$$z^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} z_3 = +i \rightarrow \text{بالای خط حقیقی} \\ \sout{z_4 = -i} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$z=i$ قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ $\rightarrow \operatorname{Res}_{z=i} f(z)e^{iz} = \lim_{z\to i} f(z)e^{iz}(z-i)$

$$= \lim_{z\to i} \frac{z}{z^4+5z^2+4}(z-i)e^{iz}$$

$$(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{z}{(z+i)(z-2i)(z+2i)}e^{iz}$$

$$= \frac{i}{(2i)(-i)(3i)}e^{i^2} = \frac{1}{6}e^{-1}$$

$z=2i$ قطب مرتبه اول تابع $\rightarrow \operatorname{Res}_{z=2i} f(z)e^{iz} = \lim_{z\to 2i} \frac{z \times e^{iz}}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}(z-2i)$

$$= \frac{2i\, e^{i(2i)}}{(i)(3i)(4i)} = \frac{-1}{6}e^{-2}$$

مثال: امتحان (دا، ۹۴)

$$* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2+8x+25}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2+8x+25}dx$$

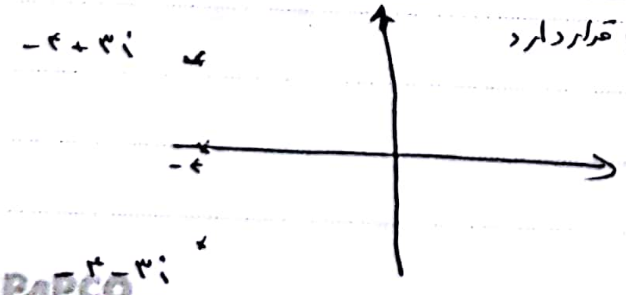
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=-4+3i} f(z)e^{2iz}\right)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i\left(\frac{-e^{-6}}{2}i(\cos 8 - i\sin 8)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\pi \frac{-e^{-6}}{2}\sin 8$$

$z^2+8z+25=0$

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-25}}{1} = -4 \pm 3i$$

$z=-4+3i$ نقاط منفرد ولی فقط بالای خط حقیقی قرار دارد



Subject

Date

$z = -۴ + ۳i \rightarrow \underset{z = -۴+۳i}{Res} f(z) e^{۲iz}$

قطب مرتبه اول است

$= \lim_{z \to -۴+۳i} \frac{۱}{z^۲ + ۸z + ۲۵} e^{۲iz} (z - (-۴ + ۳i))$

$(z-(-۴+۳i))(z-(-۴-۳i))$

$= \lim_{z \to -۴+۳i} \frac{e^{۲iz}}{z-(-۴-۳i)} = \frac{e^{۲i(-۴+۳i)}}{(-۴+۳i)-(-۴-۳i)} = \frac{e^{-۶-۸i}}{۶i} =$

$= -\frac{۱}{۶} i (e^{-۶} \cdot e^{-۸i}) = \frac{-e^{-۶}}{۶} i (\cos ۸ - i \sin ۸)$

مثال)

$\int_0^\infty \frac{\cos ۳x}{(x^۲+۴)^۲} dx = \frac{۱}{۲} \left(Re \left(۲\pi i \left(\underset{z=۲i}{Res} \frac{e^{۳iz}}{(z^۲+۴)^۲} \right) \right) \right)$

$Res = \lim \left(\frac{e^{۳iz}}{(z^۲+۴)^۲} (z - ۲i)^۲ \right)'$

ادامه به عهده خودتان

$= \lim_{z \to ۲i} \left(\frac{e^{۳iz}}{(z+۲i)^۲} \right)'$

Subject
Date

* سری فوریه : فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه $[-\pi , \pi]$ تعریف شده باشد و در خارج از بازه متناوب با دوره تناوب 2π باشد یعنی $f(x+2\pi) = f(x)$

در این صورت سری فوریه $f(x)$ عبارت است از :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

که می توان ضرایب a_0 و a_n و b_n را به صورت زیر بدست آورد.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,dx$$

یادآوری : درصورتی که تابع $f(x)$ فرد باشد : $\int_{-c}^{+c} f(x)\,dx = 0$

درصورتی که تابع $f(x)$ زوج باشد : $\int_{-c}^{+c} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{c} f(x)\,dx$

تابع زوج * تابع زوج ⟵ تابع زوج

تابع فرد * تابع فرد ⟵ تابع زوج

تابع زوج * تابع فرد ⟵ تابع فرد

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اگر تابع $f(x)$ فرد باشد داریم $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ و $a_n = \frac{1}{\pi}\int \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{فرد}}\,dx = 0$

و فقط باید b_n را محاسبه کنیم و سری فوریه $f(x)$ سینوسی است:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

اگر تابع $f(x)$ زوج باشد داریم: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{فرد}}\,dx = 0$ و فقط باید a_0 و a_n

را محاسبه کنیم و سری فوریه $f(x)$ کسینوسی است

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

مثال) (امتحان خرداد ۹۵)

تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π بصورت زیر تعریف شده اند ←

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

سری فوریه‌ی $f(x)$ را بدست آورده سپس به کمک آن مجموع

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

را محاسبه نمایید.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

حل: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\ ,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ ,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0+\int_{0}^{\pi}\frac{x}{2}dx\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{x=0}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0+\int_{0}^{\pi}\frac{x}{2}\cos nx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2n^2}\Big[\cos nx\Big]_{x=0}^{\pi}=\frac{1}{2n^2\pi}(\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}-\underbrace{\cos 0}_{1})=\begin{cases}0 & n\ \text{زوج}\\ \frac{-1}{n^2\pi} & n\ \text{فرد}\end{cases}$$

$\frac{x}{2}$ → (+) $\frac{1}{n}\sin nx$
$\frac{1}{2}$ → (−) $-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-x}{2n}\cos nx\right]_{x=0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{2n}\cos n\pi+0\right)=\frac{(-1)}{2n}(-1)^n$$

$\sin nx$
$\frac{x}{2}$ → (+) $-\frac{1}{n}\cos nx$
$\frac{1}{2}$ → (−) $-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$f(x)=\frac{\frac{\pi}{4}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\cos nx+\frac{(-1)}{2n}(-1)^n\sin nx\right)$$

Scanned by CamScanner

$$x=0 : f(0) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$(-1)^n - 1 \to \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ -2 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{-\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2\pi} \quad n \text{ فرد}$$

$$\frac{-\pi}{8} = \frac{-1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\frac{-\pi}{8}}{\frac{-1}{\pi}} = \frac{\pi^2}{8}$$

فرمول پارسوال :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$ دیدیم که

اگر طرفین این رابطه را در $f(x)$ ضرب کرده و از $-\pi$ تا π انتگرال بگیریم داریم :

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} f(x) dx}_{\frac{a_0}{2}\cdot(\pi a_0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx}_{\pi a_n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx}_{\pi b_n}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

Subject
Date

مثال: برای تابع $f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x \le \pi)$ با دوره تناوب 2π مفروض است

سری فوریه $f(x)$ را به دست آورید سپس نتیجه بگیرید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

$f(x) = x^2$ زوج است پس فقط سری فوریه کسینوسی دارد:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{x^2} \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{+2x}{n^2} \cos nx \right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi - 0 \right)$$

$$= \frac{4}{n^2} \cos n\pi$$

x^2		$\cos nx$
$2x$		$\frac{1}{n} \sin nx$
2		$-\frac{1}{n^2} \cos nx$
0		$-\frac{1}{n^3} \sin nx$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$x^2 = \frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos n\pi \cdot \cos nx$$

Subject
Date

با توجه به فرمول پارسوال:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\right)^2$$

$$\frac{x^5}{5}\Big]_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{9}\pi^4\right) + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \underbrace{(-1)^{2n}}_{+1}$$

$$\frac{\pi^5}{5} - \frac{-\pi^5}{5} = \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{\frac{2\pi^5}{5} - \frac{2\pi^5}{9}}{16\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$ (نقص

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) سری فوریه $f(x)=x^2$ را بیابید و سپس به کمک آن مجموع زیر را بیابید $-\pi \le x \le \pi$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots$$

کافی است در رابطه x را مساوی ۰ قرار دهیم:

$$0=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos 0$$

$$\Rightarrow \frac{-\pi^2}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{-\pi^2}{12}=\frac{-1}{1}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\pm\cdots$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\pm\cdots=\frac{+\pi^2}{12}$$

ادامه به عهده خودمان

Scanned by CamScanner

Subject
Date

درصورتی که تابع $f(x)$ برای $-L \leq x \leq L$ تعریف شده باشد و دارای

دوره تناوب $2L$ باشد $f(x+2L)=f(x)$ سری فوریه $f(x)$ عبارت

است از $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

* اگر $f(x)$ فرد باشد داریم $a_0=a_n=0$ و فقط سری فوریه سینوسی دارد.

* اگر $f(x)$ زوج باشد داریم $b_n=0$ و فقط سری فوریه کسینوسی دارد.

مثال) سری فوریه‌ی تابع زیر را به دست آورید:

$$f(x)=\begin{cases} 1+2x & -2\leq x<0 \\ -1+2x & 0<x\leq 2 \end{cases}$$

$$f(x+4)=f(x)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

حل: تابع $f(x)$ فرد است زیرا:

$$-2 \le x < 0 \rightarrow f(x) = 1+2x$$

$$\downarrow$$

$$0 < -x \le 2 \rightarrow f(-x) = -1+2(-x) = -1-2x = -f(x)$$

پس $f(x)$ فقط سری فوریه‌ی سینوسی دارد:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad L \rightarrow 2$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} (1+2x) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx + \int_{0}^{2} (-1+2x) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-2(1+2x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x + \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} x \right]_{x=-2}^{0} -$$

$$- \frac{2(-1+2x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x + \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} x \Big]_{x=0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{n\pi} \cos 0 + \sin 0 - \frac{-2(1-4)}{n\pi} \underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n} - \frac{8}{n^2\pi^2} \underbrace{\sin(-n\pi)}_{0} \right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{2(-1+4)}{n\pi} \cos n\pi + 0 + \frac{-2}{n\pi} \cos 0 - 0 \right)$$

$$= \frac{-1}{n\pi} + \frac{-3}{n\pi}(-1)^n - \frac{3}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n\pi}$$

$$\boxed{= \frac{-6}{n\pi}(-1)^n}$$

Scanned by CamScanner

Subject

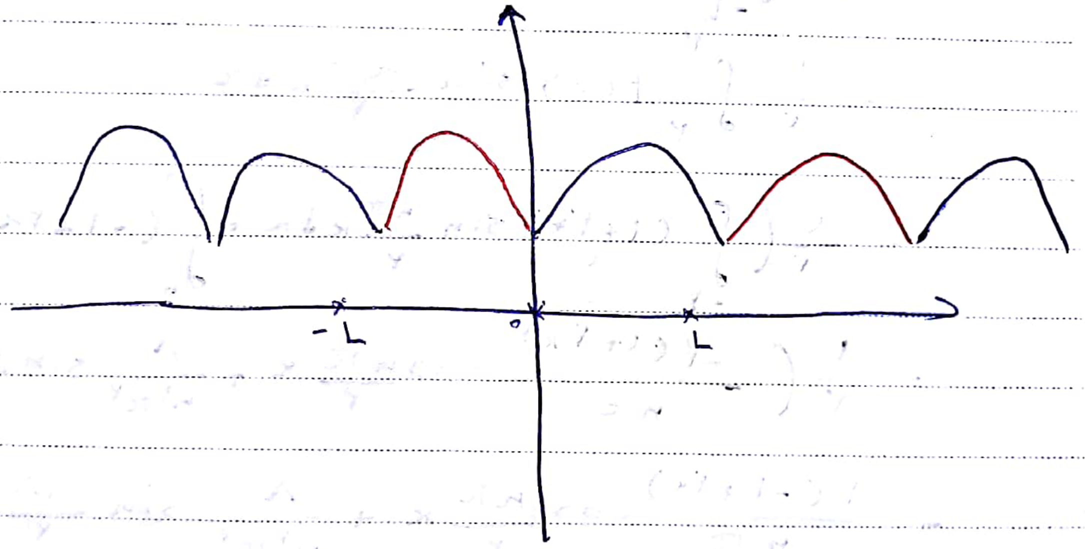
Date

بسط نیم بردی: درصورتی که تابع $f(x)$ در بازه $[0, L]$ (نصف برد $[-L, L]$) تعریف شده باشد.

می توانیم با بسط زوج تابع $f(x)$ به صورت زیر:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

به تابع زوج $F(x)$ در تمام برد $[-L, L]$ برسیم که دارای سری فوریه کسینوسی است:



$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{F(x)}_{\text{زوج}} dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{\underbrace{F(x)}_{\text{زوج}} \underbrace{\cos \frac{n\pi}{L} x}_{\text{زوج}}}_{\text{زوج}} dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

همچنین می توانیم با بسط فرد تابع $f(x)$ به فرم زیر:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\leq L \\ -f(x) & -L\leq x\leq 0 \end{cases}$$

به تابع فرد $F(x)$ در $[-L, L]$ برسیم که سری فوریه ی سینوسی دارد:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{\underbrace{F(x)}_{\text{فرد}}\underbrace{\sin\frac{n\pi}{L}x}_{\text{فرد}}}_{\text{زوج}}\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال) سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\sin \pi x$ $(0\leq x\leq 1)$ را به دست آورید.

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x \qquad L\to 1$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx=\frac{2}{1}\int_0^1 \sin\pi x\,dx=2\cdot\frac{-1}{\pi}\cos\pi x\Big]_0^1$$

$$=\frac{-2}{\pi}(\underbrace{\cos\pi}_{-1}-\underbrace{\cos 0}_{1})=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 \sin\pi x\cdot\cos\frac{n\pi}{1}x\,dx$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{2}\left(\sin(\pi-n\pi)x+\sin(\pi+n\pi)x\right)dx$$

$$=\frac{-1}{\pi-n\pi}\cos(\pi-n\pi)x\Big]_{x=0}^{1}+\frac{-1}{\pi+n\pi}\cos(\pi+n\pi)x\Big]_{x=0}^{1}$$

$$=\frac{-1}{(1-n)\pi}(\underbrace{\cos(\pi-n\pi)}_{-\cos n\pi}-\underbrace{\cos 0}_{1})+\frac{-1}{(1+n)\pi}(\underbrace{\cos(\pi+n\pi)}_{-\cos n\pi}-\underbrace{\cos 0}_{1})$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$= \cos n\pi \left(\frac{1}{(1-n)\pi} + \frac{1}{(1+n)\pi} \right) + \cos 0 \left(\frac{+1}{(1-n)\pi} + \frac{1}{(1+n)\pi} \right)$$

$$\frac{1+n+1-n}{(1-n^2)\pi}$$

$$= \frac{2}{(1-n^2)\pi} (\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + 1)$$

سری فوریه مختلط ؛ فرض کنید : $-\pi \le x \le \pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{inx} \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right)}_{\underbrace{\frac{1}{2}(a_n - i b_n)}_{c_n}} + e^{-inx} \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right)}_{\underbrace{\frac{1}{2}(a_n + i b_n)}_{c_{-n}}} \right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

که $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

انتگرال فوریه: درصورتی که تابع $f(x)$ در هر بازه‌ی متناهی پیوسته باشد، انتگرال فوریه $f(x)$ عبارت است از:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

اگر تابع $f(x)$ زوج باشد داریم $B(\omega)=0$ و انتگرال فوریه‌ی کسینوسی دارد:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

اگر تابع $f(x)$ فرد باشد داریم: $A(\omega)=0$ و انتگرال فوریه‌ی سینوسی دارد.

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

مثال) انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورید

$$f(x)=\begin{cases}e^{-2x} & x\geq 0\\ -e^{2x} & x<0\end{cases}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$x \geq 0 \rightarrow f(x) = e^{-2x}$$

$$-x < 0 \rightarrow f(-x) = -e^{-2x} = -f(x)$$ پس $f(x)$ فرد است

و انتگرال فوریه ی سینوسی دارد:

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \Big(-\underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \sin \omega x \, dx}_{I} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-2x} \sin \omega x \, dx}_{J} \Big)$$

مشتق e^{2x} ، $2e^{2x}$ ، $4e^{2x}$ — انتگرال $\sin \omega x$ ، $-\frac{1}{\omega}\cos \omega x$ ، $-\frac{1}{\omega^2} \sin \omega x$ (+ ، −)

$$I = \Big[\frac{-1}{\omega} e^{2x} \cos \omega x + \frac{2}{\omega^2} e^{2x} \sin \omega x \Big]_{x=-\infty}^{0} - \frac{4}{\omega^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \sin \omega x \, dx}_{I}$$

$$I\left(1 + \frac{4}{\omega^2}\right) = \left(\frac{-1}{\omega} e^0 \cos 0 + \frac{2}{\omega^2} e^0 \sin 0 + \frac{1}{\omega} \cdot 0 - \frac{2}{\omega^2} \cdot 0 \right)$$

$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} \cos \omega x$ ، $\lim e^{2x} \sin \omega x$

$$I\left(1 + \frac{4}{\omega^2}\right) = -\frac{1}{\omega}$$

$$I = \frac{-\frac{1}{\omega}}{1 + \frac{4}{\omega^2}} = \frac{-\frac{1}{\omega}}{\frac{\omega^2+4}{\omega^2}} = \frac{-\omega}{\omega^2 + 4}$$

درصورتی که $\lim_{x \to b} f(x) = 0$ و $g(x)$ یک تابع محدود (کراندار) باشد آنگاه:

$$\lim_{x \to b} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

e^{-2x} $\sin \omega x$

$-2e^{-2x}$ $\frac{-1}{\omega}\cos \omega x$

$+4e^{-2x}$ $\frac{-1}{\omega^2}\sin \omega x$

$$J = \frac{-1}{\omega} e^{-2x}\cos \omega x - \frac{2}{\omega^2} e^{-2x}\sin \omega x \Big]_{x=0}^{+\infty} - \frac{4}{\omega^2}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2x}\sin \omega x\,dx}_{J}$$

$$J\left(1+\frac{4}{\omega^2}\right) = \frac{+1}{\omega} e^0 \underbrace{\cos 0}_{1} + 0$$

$$J = \frac{\frac{1}{\omega}}{1+\frac{4}{\omega^2}} = \frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{\omega^2+4}{\omega^2}} = \frac{\omega}{\omega^2+4}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{+\omega}{\omega^2+4} + \frac{\omega}{\omega^2+4}\right)$$

مثال) به کمک انتگرال فوریه تابعی مناسب نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{1+\omega^2} = \begin{cases} \pi e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A_\omega \cos \omega x + B_\omega \sin \omega x)\,d\omega$$

کافی است با در نظر گرفتن $f(x) = \begin{cases} \pi e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ نشان دهیم که:

$$A_\omega = \frac{1}{1+\omega^2}, \quad B_\omega = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos \omega x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} 0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \pi e^{-x}\cos \omega x\,dx$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مشتق — انتگرال

e^{-x} $\cos \omega x$

$-e^{-x}$ $\frac{+1}{\omega} \sin \omega x$

$+e^{-x}$ $\frac{-1}{\omega^2} \cos \omega x$ → با ضریب ها کاری نداریم

$e^{-\infty} = 0$

$e^{0} = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x \, dx}_{I} = \frac{1}{\omega} e^{-x} \sin \omega x - \frac{1}{\omega^2} e^{-x} \cos \omega x \Big]_0^{+\infty} - \frac{1}{\omega^2} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x \, dx}_{I}$$

$$I \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{+1}{\omega^2}$$

$$I = \frac{\frac{1}{\omega^2}}{1 + \frac{1}{\omega^2}} = \frac{\frac{1}{\omega^2}}{\frac{\omega^2 + 1}{\omega^2}} = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

$$B_\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} 0 \; + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \pi e^{-x} \sin \omega x \, dx$$

e^{-x} $\sin \omega x$

$-e^{-x}$ $\frac{-1}{\omega} \cos \omega x$

$+e^{-x}$ $\frac{-1}{\omega^2} \sin \omega x$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x \, dx = \frac{-1}{\omega} e^{-x} \cos \omega x - \frac{1}{\omega^2} e^{-x} \sin \omega x \Big]_0^{+\infty} - \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x \, dx$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$I\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{+1}{\omega}$$

$$I=\frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{\omega^2+1}{\omega^2}}=\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

مثال) انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<\pi \quad (-\pi<x<+\pi)\\ 0 & |x|>\pi \;:\; x<-\pi \text{ یا } x>\pi\end{cases}$$

سپس به کمک آن نتیجه بگیرید که:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A_\omega\cos\omega x+B_\omega\sin\omega x)\,d\omega$$

$$A_\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}1\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{+1}{\omega}\sin\omega x\Big]_0^{\pi}=\frac{+2}{\pi\omega}(\sin\omega\pi-\sin 0)=$$

$$=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega\pi$$

$$B_\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\underbrace{\sin\omega x}_{\text{فرد}}\,dx=0$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega\pi\cos\omega x+0\right)d\omega$$

$$x=0:\quad 1=\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\omega}\sin\pi\omega\underbrace{\cos 0}_{1}\,d\omega$$

PAPCO

Subject
Date

$\pi w = t$

$\pi\, dw = dt \rightarrow dw = \frac{1}{\pi} dt$

$: \quad I = \int_0^{\infty} \frac{2}{t} \sin t \cdot \frac{1}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

مثال) انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ را بدست آورید:

$f(x) = \int_0^{\infty} A_w \cos wx \, dw$

$A_w = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} \cos wx \, dx$

$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(\int_c \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{iwz} dz \right)$

$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=+i} f(z) e^{iwz} \right) \right)$

$\underbrace{\qquad}_{\frac{1}{4} i e^{-w}(w+1)}$

$z = +i$ قطب مرتبه دوم $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ است

$\Rightarrow \operatorname{Res} \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{iwz} = \lim_{z \to i} \left(\frac{1}{\underbrace{(z^2+1)^2}_{(z-i)^2 (z+i)^2}} e^{iwz} \cdot (z-i)^2 \right)'$

$= \lim_{z \to i} \left(\frac{e^{iwz}}{(z+i)^2} \right)'$

$= \lim_{z \to i} \left(\frac{iwe^{iwz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{iwz}}{(z+i)^4} \right)$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$= \frac{i\omega e^{-\omega}(2i)^2 - 2(2i)e^{-\omega}}{(2i)^4}$$

$$= \frac{4i\omega e^{-\omega} - 4ie^{-\omega}}{16} = \frac{4ie^{-\omega}(\omega-1)}{16}$$

$$= \frac{1}{4} i e^{-\omega}(\omega-1)$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی :

درصورتی که u تابعی با بیش از یک متغیر مستقل باشد : $u=u(x,y)$

$u=u(x,y,z)$

مشتق نسبت به هر یک از متغیرها را مشتق نسبی (یا جزئی) می‌نامیم :

مشتق مرتبه اول :

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}$$

مشتق مرتبه دوم :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

معادله با مشتق جزئی مرتبه اول :

حالت خاص : معادله فقط شامل $\frac{\partial u}{\partial x}$ باشد. (فاقد $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشد.)

در این صورت y را ثابت در نظر می گیریم، از طرفین معادله فقط روی x انتگرال می گیریم.

مثال : $\frac{\partial u}{\partial x} + x - 2xy + 2 = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - x - 2$$

$$\int ; dx :$$

$$u = 2y\int x\,dx - \int x\,dx - 2\int dx + g(y)$$

$$u = yx^2 - \frac{x^2}{2} - 2x + g(y)$$

به همین ترتیب اگر معادله فقط شامل $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشد، x را ثابت در نظر می گیریم.

در حل معادله به فرم کلی : $A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y,u)$

دستگاه کمکی لاگرانژ را تشکیل می دهیم :

$$\frac{dx}{A} \overset{①}{=} \frac{dy}{B} \overset{②}{=} \frac{du}{R}$$

③

Scanned by CamScanner

Subject
Date

* با حل ۲ معادله از این سه معادله موجود به جواب های $c_1 = v_1(x, y, u)$ و $c_2 = v_2(x, y, u)$ می رسیم.

* جواب عمومی معادله عبارت است از: $\varphi(v_1, v_2) = 0$

یا

$v_1 = \varphi(v_2)$ یا $v_2 = \varphi(v_1)$

مثال:

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$$

دستگاه لاگرانژ:

$$\frac{dx}{x^2} \overset{①}{=} \frac{dy}{y^2} \overset{②}{=} \frac{du}{u^2}$$

① : $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{-1}{x} = \frac{-1}{y} + c_1$$

$$\rightarrow c_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = v_1(x, y, u)$$

② : $\frac{dy}{y^2} = \frac{du}{u^2}$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{du}{u^2}$$

$$\frac{-1}{y} = \frac{-1}{u} + c_2$$

$$c_2 = \frac{1}{u} - \frac{1}{y} = v_2(x, y, u)$$

جواب عمومی $\varphi(v_1, v_2) = 0$

$$\varphi\left(\frac{x-y}{xy}, \frac{y-u}{yu}\right)$$

Subject
Date

مثال :
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xyu$$

دستگاه لاگرانژ
$$\frac{dx}{x} \overset{(1)}{=} \frac{dy}{y} \overset{(2)}{=} \frac{du}{xyu}$$

(1) :
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\operatorname{Ln} x = \underbrace{\operatorname{Ln} y + \operatorname{Ln} c_1}_{\operatorname{Ln} y c_1}$$

$$\Rightarrow x = y c_1 \; ; \; c_1 = \frac{x}{y} \; ; \; v_1(x, y, u)$$

(2) :
$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{xyu}$$

(3) :
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{xyu}$$

هیچکدام از این دو معادله قابل حل نیستند

* اما اگر قرار دهیم : $x = y c_1$

از معادله (2) داریم :

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{y c_1 \cdot y u}$$

$$\frac{y^2 dy}{y} = \frac{du}{c_1 u}$$

$$\int y \, dy = \frac{1}{c_1} \int \frac{du}{u}$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{y^2}{2} + c_2 = \frac{1}{c_1} \ln u \Rightarrow u = e^{c_1\left(\frac{y^2}{2} + c_2\right)}$$

$$u = e^{c_1 \frac{y^2}{2}} \cdot c_3 \Rightarrow c_3 = u\, e^{-c_1 \frac{y^2}{2}} ; \; v_2(x, y, u)$$

جواب: $\varphi(v_1, v_2) = 0$

حل با استفاده از تغییر متغیر:

مثال) با تغییر متغیرهای $t = x + 2y$ و $z = 2x - y$ معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{(2x - y)}_{z}\underbrace{(x + 2y)}_{t}$$

$$u = u(z, t), \quad z = 2x - y, \quad t = x + 2y$$

زنجیره‌ای: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{2} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \underbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}_{1}$

$$= 2\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{-1} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \underbrace{\frac{\partial t}{\partial y}}_{2}$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial z} + 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$2u_z + u_t + 2(-u_z + 2u_t) = z \cdot t$$

$$5u_t = z \cdot t$$

$\int \dots dt$ (z را ثابت در نظر می‌گیریم)

$$5u + c_1 = z \int \underbrace{t\, dt}_{\frac{t^2}{2}} + c_2$$

Scanned by CamScanner

$$du = z\frac{t^2}{2} + c_3 \rightarrow u = \frac{1}{10}t^2 z + c_4$$

$t \rightarrow (x+2y)^2$ ، $z \rightarrow (2x-y)$

معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم :

فرم کلی : $A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

اگر $B^2-4AC>0$ معادله، هذلولوی (هیپربولیک) است.

" $B^2-4AC=0$ معادله، سهموی (پارابولیک) است.

" $B^2-4AC<0$ معادله، بیضوی (الیپتیک) است.

معادله لاپلاس (یا پتانسیل) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$A=1, B=0, C=1$ $B^2-4AC=-4<0$: معادله بیضوی است

معادله موج :

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$A=k^2, B=0, C=-1$

$B^2-4AC=+4k^2>0$ معادله، هذلولوی است

Scanned by CamScanner

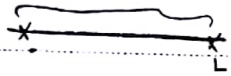
Subject
Date

معادله گرما:

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

معادله سهموی است: $A = k^2 , B = 0 , C = 0$: $B^2 - 4AC = 0$

معادله موج:



یک سیم به طول L داریم $(0 < x < L)$ که در دو سر $x = 0$ و $x = L$ آن را ثابت نگه داشته‌ایم. اگر در زمان اولیه $t = 0$ آن را از وضعیت اولیه خارج کنیم، موجی ایجاد می‌شود که معادله آن عبارت است از:

جواب: $u(x,t)$

$$* \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

شرایط مرزی: $u(0,t) = 0 , u(L,t) = 0$

شرایط اولیه:
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

حل با روش جداسازی متغیرها:

فرض می‌کنیم جواب معادله عبارت است از:

$$u(x,t) = y(x) \cdot T(t)$$

با قرار در * داریم:

$$c^2 \cdot y''(x)\, T(t) - y(x)\, T''(t) = 0$$

$$\underbrace{\frac{y''(x)}{y(x)}}_{\text{فقط برحسب } x} = \underbrace{\frac{T''(t)}{c^2 T(t)}}_{\text{فقط برحسب } t} = \lambda$$

$$\begin{cases} y''(x) - \lambda y(x) = 0 \\ T''(t) - c^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

شرایط مرزی : $u(0,t)=0$

$y(0)T(t)=0 \longrightarrow y(0)=0$ و یا $T(t)=0 \rightarrow y(0)=0$

$\downarrow$

$u(x,t)=0$ جواب بدیهی ✗

شرط مرزی : $u(L,t)=0$

$y(L)T(t)=0 \longrightarrow y(L)=0$ و یا $T(t)=0 \rightarrow y(L)=0$

$\downarrow$

$u=0$ جواب بدیهی ✗

$$\begin{cases} ① \; y''(x)-\lambda y(x)=0 \quad y(0)=0 \;,\; y(L)=0 \\ ② \; T''(t)-c^2\lambda T(t)=0 \end{cases}$$

① $y''-\lambda y=0 \;,\; y(0)=0 \;,\; y(L)=0$

$\lambda=0 \rightarrow y''=0 \rightarrow y'=A \rightarrow y(x)=Ax+B$

$y(0)=B \xrightarrow{y(0)=0} B=0$,

$y(x)=Ax$

$y(L)=AL \xrightarrow{y(L)=0} AL=0 \xrightarrow{L\neq 0} A=0 \Rightarrow y(x)=0$

$\rightarrow u(x,t)=0$

✗ جواب بدیهی

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$\lambda > 0 : y'' - \lambda y = 0$

معادله مشخصه $m^2 - \lambda = 0 \rightarrow m^2 = \lambda \rightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}$ دو ریشه‌ی حقیقی

$y(x) = Ae^{+\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$y(0) = A + B \xrightarrow{y(0)=0} A + B = 0 \rightarrow B = -A$

$y(x) = Ae^{+\sqrt{\lambda}x} - Ae^{-\sqrt{\lambda}x}$

$= A(e^{+\sqrt{\lambda}x} - \frac{1}{e^{+\sqrt{\lambda}x}})$ ---- ✗

پس $\lambda < 0$: معادله مشخصه : $m^2 - \lambda = 0$

$m^2 = \lambda = -(-\lambda) \rightarrow m = \pm\sqrt{-(-\lambda)}$

$\underbrace{-\lambda}_{>0}$

ریشه‌های مختلط : $m = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$y(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$y(0) = A\cos 0 + 0 \xrightarrow{y(0)=0} A = 0 \; ; \; y(x) = B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$ (س)

$y(L) = B\sin\sqrt{-\lambda}\,L \xrightarrow{y(L)=0}$

$B\sin\sqrt{-\lambda}\,L = 0 \xrightarrow{B\neq 0} \sin\sqrt{-\lambda}\,L = 0$

$\sqrt{-\lambda}\,L = n\pi \;,\; n = 1, 2, \ldots$

$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{L}$

(س) $; \; y_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{L})x \quad n = 1, 2, \ldots$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

(۲) $T''(t) - c^2 \lambda T(t) = 0$

$$T''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0 \qquad \frac{cn\pi}{L} = \lambda_n$$

$$T''(t) + \lambda_n^2 T(t) = 0$$

معادله مرتبه دوم روی t

معادله مشخصه $m^2 + \lambda_n^2 = 0 \longrightarrow m^2 = -\lambda_n^2$

$m = \pm i \lambda_n$ دو ریشه ی مختلط

$$T_n(t) = C_n \cos \lambda_n t + D_n \sin \lambda_n t$$

$$u_n(x,t) = y_n(x) \cdot T_n(t) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \left(C_n \cos \lambda_n t + D_n \sin \lambda_n t\right)$$

$0 < x < L$

از شرط اولیه $u(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x)$: سری فوریه ی سینوسی (نیم برد) تابع $f(x)$

پس :

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

از شرط اولیه $u_t(x,0) = g(x)$ داریم :

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left(-\lambda_n C_n \sin \lambda_n t + D_n \lambda_n \cos \lambda_n t\right)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

بسط نیم بردی سینوسی تابع $g(x)$:

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).D_n\lambda_n=g(x)$$

$$\Rightarrow D_n\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال) معادله زیر را با روش جداسازی متغیرها حل کنید :

$$4u_{xx}-u_{tt}=0\quad,\quad 0<x<1\ ,\ t>0$$

$u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$

$u(x,0)=\cos\pi x$

$u_t(x,0)=0$

$$u(x,t)=y(x)T(t)$$

$$4y''(x)T(t)-y(x)T''(t)=0$$

$$\frac{y''}{y}=\frac{T''}{4T}=\lambda$$

$$\begin{cases} (1)\ y''(x)-\lambda y(x)=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y(1)=0 \\ (2)\ T''(t)-4\lambda t=0 \end{cases}$$

(1): $y''(x)-\lambda y(x)=0$

$\lambda<0$: $m^2-\lambda=0$

$m^2=\lambda=-(-\lambda)$

$m=\pm i\sqrt{-\lambda}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$y(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$y(0) = A \xrightarrow{y(0)=0} A = 0 \;\therefore\; y(x) = B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$y(1) = B\sin\sqrt{-\lambda} \xrightarrow{y(1)=0} B\sin\sqrt{-\lambda} = 0$

$\sin\sqrt{-\lambda} = 0 = \sin n\pi$

$\sqrt{-\lambda} = n\pi \;\therefore\; (-\lambda) = (n\pi)^2$

$y_n(x) = B_n\sin(n\pi x)$

(۲) $T''(t) + ۲(n\pi)^2 T(t) = 0$

معادله مشخصه $m^2 + (۲n\pi)^2 = 0 \rightarrow m^2 = -(۲n\pi)^2 \;\therefore\; m = \pm i(۲n\pi)$

$T_n(t) = C_n\cos(۲n\pi t) + D_n\sin(۲n\pi t)$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos(۲n\pi t) + D_n\sin(۲n\pi t)\right).\sin(n\pi x)$

$t=0 : u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(n\pi x) = \cos\pi x$ از شرط صورت مسئله

$C_n = \frac{۲}{1}\int_0^1 \cos\pi x.\sin(n\pi x)\,dx = ۲\int_0^1 \frac{1}{۲}(\sin$ ~~...~~

L

$= ۲\int_0^1 \frac{1}{۲}\left(\sin(\pi - n\pi)x + \sin(\pi + n\pi)x\right)dx$

$C_n = \frac{-1}{\pi - n\pi}\cos(\pi - n\pi)x\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi + n\pi}\cos(\pi + n\pi)x\Big|_0^1$

$= \frac{-1}{(1-n)\pi}\left(\underbrace{\cos(\pi - n\pi)}_{-\cos n\pi} - \underbrace{\cos 0}_{1}\right) - \frac{1}{(1+n)\pi}\left(\underbrace{\cos(\pi + n\pi)}_{-\cos n\pi} - \underbrace{\cos 0}_{1}\right)$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$= (-\cos n\pi - 1)\left(-\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)$$

حل شد: $\frac{1+n+1-n}{1-n^2}$

$$4y''(x)T(t) - y(x)T''(t) = 0$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{T''}{4T} = \lambda$$

$$\begin{cases} ① \quad y''(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0 \\ ② \quad T''(t) - 4\lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

معادله گرما: $c^2 u_{xx} - u_t = 0 \quad ; \quad 0 \le x \le L, \quad t \geq 0$ *

شرایط مرزی: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0$

شرط اولیه: $u(x,0) = f(x)$

حل با روش جداسازی متغیرها:

فرض کنیم جواب: $u(x,t) = y(x)\,T(t)$

$$*: c^2 y''(x)T(t) - y(x)T'(t) = 0$$

$$\frac{y''(x)}{y(x)} = \frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = \lambda$$

Subject
Date

(الف) $y''(x) - \lambda y(x) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \;,\; y'(L) = 0$

(ب) $T'(t) - c^2 \lambda T(t) = 0$

شرایط مرزی : u_x

$u(x,t) = y(x)\,T(t)$

$u_x(x,t) = y'(x)\,T(t)$

$u_x(0,t) = y'(0)\,T(t) \xrightarrow{\text{بنا بر صورت مسئله}} y'(0)\,T(t) = 0 \xrightarrow[\text{به جواب بدیهی می رسد}]{T(t)=0} \rightarrow y'(0) = 0$

$u_x(L,t) = y'(L)\,T(t) \overset{\text{بنا بر شرط}}{=} 0 \longrightarrow y'(L) = 0$

(الف) $y''(x) - \lambda y(x) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \;,\; y'(L) = 0$

معادله مشخصه $m^2 - \lambda = 0 \;:\; m^2 = \lambda$

$\lambda < 0 \;:\; m^2 = -\underbrace{(-\lambda)}_{>0} \rightarrow m = \pm\sqrt{-(-\lambda)} = \pm i\sqrt{-\lambda}$: ریشه‌های مختلط

$y(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}\,x + B\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}\,x$

$y'(0) = B\sqrt{-\lambda} \xrightarrow{\sqrt{-\lambda} \neq 0} B = 0 \longrightarrow$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

(۳) $y(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x$

$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$y'(L) = 0$

$y'(L) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}\,L \overset{\uparrow}{=} 0$

$A \neq 0 ,\ \sqrt{-\lambda} \neq 0$

$\downarrow$

$\sin\sqrt{-\lambda}\,L = 0 = \sin n\pi$

$\sqrt{-\lambda}\,L = n\pi$

$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{L}$

(۳) $\Longrightarrow y_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi}{L}x$

(۲): $T'(t) - c^2\lambda T(t) = 0$

$-\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2 \therefore T'(t) + (\frac{cn\pi}{L})^2 T(t) = 0$ معادله مرتبه اول

$T'(t) = -(\frac{cn\pi}{L})^2 T(t)$

$\frac{T'(t)}{T(t)} = -(\frac{cn\pi}{L})^2$

$\int : \int \frac{T'(t)}{T(t)}\,dt = \int -(\frac{cn\pi}{L})^2\,dt$

$\ln T(t) = -(\frac{cn\pi}{L})^2 t + c_1$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t + c_1}$$

$$T_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$u_n(x,t) = y_n(x)\, T_n(t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\, T_n(t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n c_n}_{D_n} \cos\frac{n\pi}{L}x \cdot e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\frac{n\pi}{L}x \overset{\text{از شرط اولیه}}{=} f(x)$$

سری فوریه کسینوسی (نیم بردی) تابع $f(x)$

$$\Rightarrow D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال)

$$u_{xx} - u_t = 0 \qquad 0 \leq x \leq \pi \,,\; t \geq 0$$

$$u_x(0,t) = 0 \,,\; u_x(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = \sin 2x$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$u(x,t) = y(x)\,T(t)$

$$
\begin{cases}
① \quad y''(x) - \lambda y(x) = 0 \; ; \; y'(0) = 0 \,,\, y'(\pi) = 0 \\
② \quad T'(t) - \lambda T(t) = 0
\end{cases}
$$

① : $\lambda < 0$: $m^2 - \lambda = 0$: $m = \pm\sqrt{-(-\lambda)} = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$y(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}\,x + B\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}\,x$

$y'(0) = B\sqrt{-\lambda} \xrightarrow{y'(0)=0} B = 0$: $y(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x$ ③

$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$y'(\pi) = 0 \Rightarrow y'(\pi) = -A\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0$

$\sin(-\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 = \sin(n\pi)$

$\Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,\pi = n\pi \rightarrow \sqrt{-\lambda} = n$

③ : $y_n(x) = A_n\cos nx$

PAPCO

Subject
Date

(۲): $T'(t) - \lambda T(t) = 0$

$-\lambda = n^2 \rightarrow T'(t) + n^2 T(t) = 0$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -n^2$$

$\int$: $\ln T(t) = -n^2 t + c_1$

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{A_n C_n}{D_n} \cos nx \, e^{-n^2 t}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos nx \underbrace{e^{0}}_{1} = \sin 2x$$ (از شرط مسئله)

سری فوریه ی کسینوسی است پس:

$$D_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin 2x \cdot \cos nx) \, dx$$

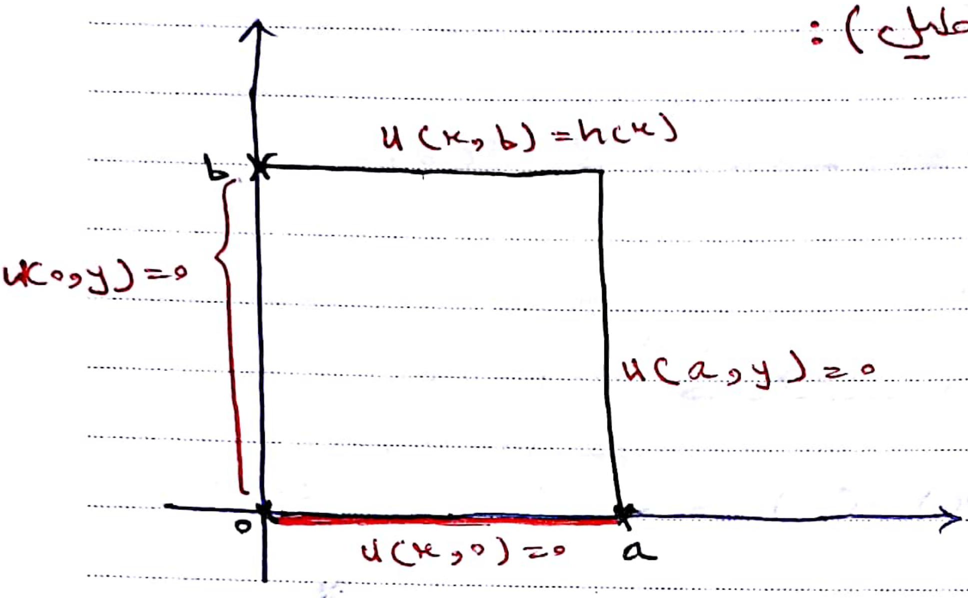
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(2+n)x + \sin(2-n)x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{2+n} \underbrace{\cos(2+n)x \Big]_{x=0}^{\pi}}_{\cos(n\pi) - \cos 0} + \frac{-1}{2-n} \underbrace{\cos(2-n)x \Big]_{x=0}^{\pi}}_{\cos(-n\pi) - \cos 0} \right)$$

$= \ldots$

Scanned by CamScanner

معادله پتانسیل (در مستطیل):



$u_{xx}+u_{yy}=0$; $0<x<a$, $0<y<b$ *

شرایط مرزی: $u(0,y)=u(a,y)=0$, $u(x,0)=0$, $u(x,b)=h(x)$

حل با روش جداسازی متغیرها:

فرض کنیم جواب معادله عبارت است از:

$$u(x,y)=F(x).G(y)$$

$$*: \; F''(x)G(y)+F(x)G''(y)=0$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{-G''(x)}{G(y)}=\lambda$$

$$\begin{cases} (1)\; F''(x)-\lambda F(x)=0 \;;\; F(0)=0 ,\; F(a)=0 \\ (2)\; G''(y)+\lambda G(y)=0 \;;\; G(0)=0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

شرایط مرزی: $u(0,y)=0$

$F(0)G(y)=0 \xrightarrow[\text{به جواب بدیهی می‌رسد}]{G(y)=0 \text{ به جواب}} F(0)=0$

$u(a,y)=0$

$F(a)G(y)=0 \xrightarrow[\text{می‌رسد}]{G(y)=0 \text{ به جواب بدیهی}} F(a)=0$

$u(x,0)=0 \rightarrow F(x)G(0)=0 \xrightarrow[\text{می‌رسد}]{F(x)=0 \text{ به جواب بدیهی و } y=0} G(0)=0$

(1): $F''(x)-\lambda F(x)=0 \quad , F(0)=0 \quad , F(a)=0$

معادلهٔ مشخصه $m^2-\lambda=0$

$\lambda<0 : m^2=\lambda : m=\pm i\sqrt{-\lambda}$ ریشه‌های مختلط:

$F(x)=A\cos(\sqrt{-\lambda}\,x)+B\sin(\sqrt{-\lambda}\,x)$

$F(0)=A \xrightarrow{F(0)=0} A=0 \quad , F(x)=B\sin(\sqrt{-\lambda}\,x)$

$F(a)=B\sin\sqrt{-\lambda}\,a \xrightarrow[B\neq 0]{F(a)=0} \sin\sqrt{-\lambda}\,a=0=\sin n\pi$

$n=1,2,\ldots$

$\sqrt{-\lambda}\,a=n\pi$

$\sqrt{-\lambda}=\frac{n\pi}{a} : -\lambda=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

$F_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{a}x$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

(۲) : $G''(y) + \lambda G(y) = 0$, $G(0) = 0$

$-\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$: $G''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G(y) = 0$ معادله مرتبه دوم

معادله ی مشخصه : $m^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = 0 \longrightarrow m^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

ریشه های حقیقی : $m = \pm \frac{n\pi}{a}$

$$G_n(y) = C_n e^{+\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

$$G(0) = 0 \longrightarrow C_n \underbrace{e^0}_{1} + D_n \underbrace{e^0}_{1} = 0 \longrightarrow D_n = -C_n$$

$$G_n(y) = C_n e^{+\frac{n\pi}{a}y} - C_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

$$= C_n\big(\underbrace{e^{+\frac{n\pi}{a}y} - e^{-\frac{n\pi}{a}y}}_{2\sinh\frac{n\pi}{a}y}\big)$$

$$u_n(x,y) = F_n(x)\, G_n(y)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)\, G_n(y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{2B_n C_n}^{D_n} \cdot \sin\frac{n\pi}{a}x \cdot \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

از شرط : $u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{a}x \cdot \sinh\frac{n\pi}{a}b = h(x)$

سری فوریه ی سینوسی (نیم بردی) تابع $h(x)$ است پس:

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$D_n \cdot \sinh\frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \cdot h(x)\,dx$$

مثال: اگر $a=b=1$ ، $h(x)=x(\pi-x)$

$$D_n = \frac{1}{\sinh n\pi}\cdot 2\int_0^1 x(\pi-x)\sin(n\pi)x\,dx$$

$$= \frac{2}{\sinh(n\pi)}\left(\frac{x^2-\pi x}{n\pi}\cos(n\pi)x - \frac{2}{n^3\pi^3}\cos(n\pi)x\right]_{x=0}^{1}$$

$\pi x - x^2$	$\sin(n\pi)x$
$\pi - 2x$	$\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi)x$
-2	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi)x$
0	$\frac{+1}{n^3\pi^3}\cos(n\pi)x$

تبدیل معادلات غیرهمگن به فرم همگن:

$* \; c^2 u_{xx} - u_{tt} = F(x) \quad (0\le x\le L \,,\; t\ge 0)$ معادله موج

(شرایط مرزی): $u(0,t)=A \,,\; u(L,t)=B$

شرایط اولیه: $u(x,0)=f(x) \,,\; u_t(x,0)=g(x)$

P4PCO

Subject
Date

با در نظر گرفتن تغییر متغیر : ① $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ در معادله * ،

$r(x)$ را طوری به دست می‌آوریم که معادله * به معادله‌ی همگن روی $v(x,t)$ تبدیل شود.

قرار در * ① : $c^2(v_{xx} + r''(x)) - v_{tt} = F(x)$

شرایط مرزی : $u(0,t) = A$ ① → $v(0,t) + r(0) = A$

$u(L,t) = B$ → $v(L,t) + r(L) = B$

شرط اولیه : $u(x,0) \overset{①}{=} v(x,0) + r(x) \overset{\text{شرط}}{=} f(x)$

$u_t(x,0) \overset{①}{=} v_t(x,0) \overset{\text{شرط}}{=} g(x)$

$$\begin{cases} c^2 v_{xx} - v_{tt} = 0 \\ v(0,t) = 0 \\ v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = f(x) - r(x) \\ v_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 r''(x) = F(x) \\ r(0) = A \\ r(L) = B \end{cases}$$

با حل این معادله مرتبه ۲ ، $r(x)$ را به دست می‌آوریم

معادله موج همگن با شرایط مرزی همگن است

مثل قبل می‌توانیم آن را حل کنیم

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تمرین) معادله زیر را به فرم همگن تبدیل کنید:

$u_{xx} - u_{tt} = \underbrace{-\sin x}_{F(x)}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \qquad 0 < x < \pi \ , \ t \geq 0$$

$u(0, t) = 1 \ , \ u(\pi, t) = 3$

$u(x, 0) = x \ , \ u_t(x, 0) = 0 \qquad c^2 u_{xx} - u_{tt} = F(x)$

مثال) امتحان ۹۶/۳/۱۷: معادله زیر را به یک معادله همگن تبدیل کنید:

$3u_t = 12 u_{xx} + 4x - 2 \ ; \ 0 \leq x \leq 2 \ , \ t \geq 0$

$u(0, t) = -3 \ , \ u(2, t) = 0$

$u(x, 0) = -3$

$12 u_{xx} - 3u_t = 2 - 4x$

$* \ 4 u_{xx} - u_t = \underbrace{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x}_{F(x)}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تغییر متغیر: $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ ①

قرار در ① * : $4(v_{xx} + r''(x)) - v_t = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x$

$u(0,t) \overset{①}{=} v(0,t) + r(0) \overset{\text{شرط}}{=} -3$

$u(2,t) \overset{①}{=} v(2,t) + r(2) \overset{\text{شرط}}{=} 0$

$u(x,0) \overset{①}{=} v(x,0) + r(x) \overset{\text{شرط}}{=} -3$

$$\begin{cases} 4v_{xx} - v_t = 0 \\ v(0,t) = 0 \\ v(2,t) = 0 \\ v(x,0) = -3 - r(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 4r''(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x \\ r(0) = -3 \\ r(2) = 0 \end{cases}$$

$= -3 - (-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{5}{9}x - 3)$

$r''(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x$

$r'(x) = \int (\frac{1}{6} - \frac{1}{3}x)\,dx = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^2 + c_1$

$r(x) = \int (\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^2 + c_1)\,dx$

$r(x) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + c_1 x + c_2$

$r(0) = c_2 \xrightarrow{r(0) = -3} c_2 = -3$

$r(2) = \frac{4}{12} - \frac{8}{18} + 2c_1 - 3 \xrightarrow{r(2) = 0}$

$\frac{1}{3} - \frac{4}{9} + 2c_1 - 3 = 0 \rightarrow c_1 = \frac{+5}{9}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

دیدیم که انتگرال فوریه ی تابع $f(x)$:

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A_\omega \cos\omega x + B_\omega \sin\omega x)\,d\omega$$

$$\cos\omega x=\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2} \qquad \sin\omega x=\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}$$

فرم مختلط انتگرال فوریه ی تابع $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega e^{i\omega x}\,d\omega$$

:

$$C_\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$

فوریه

$$F(f(x))=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx = \bar{f}(\omega)$$

و تبدیل فوریه ی معکوس عبارت است از:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\omega)\,e^{+i\omega x}\,dx$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) امتحان ۹۵/۱۰/۱۰ : تبدیل فوریه‌ی تابع f(x) را به‌دست آورید:

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<\pi \quad : \quad -\pi<x<\pi\\ 0 & |x|>\pi \quad : \quad x<-\pi \text{ یا } x>\pi\end{cases}$$

$$F(f(x))=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot e^{-i\omega x}dx$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\right]_{x=-\pi}^{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{i}{\omega}\right)\left(e^{-i\omega\pi}-e^{+i\omega\pi}\right)$$

تمرین: تبدیل فوریه‌ی تابع

$$f(x)=e^{-|y|} \qquad y=2x+3$$

تبدیل فوریه‌ی مشتق f : (f') $\qquad$ (فرض کنیم : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$)

$$F(f'(x))=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(f(x)e^{-i\omega x}\right]_{-\infty}^{+\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

(جمله‌ی اول → 0)

$u=e^{-i\omega} \to du=-i\omega e^{-i\omega x}dx$

$dv=f'(x)dx \to v=f(x)$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$= i\omega \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx}_{F(f(x))}$$

$$F(f'(x)) = i\omega F(f(x))$$

$$F(f''(x)) = i\omega \underbrace{F(f'(x))}_{i\omega F(f(x))}$$

$$\Rightarrow F(f''(x)) = -\omega^2 F(f(x))$$

درحل معادلات با مشتقات جزئی با تبدیل فوریه :

اگر $+\infty > x > -\infty$ از طرفین معادله تبدیل فوریه ی مختلط می گیریم :

$$F(u(x,t)) = \bar{u}(\omega,t)$$

$$F(u_x(x,t)) = i\omega F(u(x,t))$$

$$F(u_{xx}(x,t)) = -\omega^2 F(u(x,t)) = -\omega^2 \bar{u}(\omega,t)$$

$$F(u_t(x,t)) = \bar{u}_t(\omega,t)$$

$$F(u_{tt}(x,t)) = \bar{u}_{tt}(\omega,t)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) معادله زیر را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} e^{x} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$u(\pm\infty, t) = 0 \quad , \quad u_t(x,0) = 0$$

چون $-\infty < x < +\infty$ از طرفین معادله تبدیل فوریه ی مختلط می گیریم:

$$F(u_{xx}) - F(u_{tt}) = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$-\omega^2 \bar{u}(\omega, t) - \bar{u}_{tt}(\omega, t) = 0$$

$F(u(x,t)) = \bar{u}(\omega, t)$

$F(u_{xx}) = -\omega^2 F(u) = -\omega^2 \bar{u}(\omega, t)$

$F(u_{tt}) = \bar{u}_{tt}(\omega, t)$

معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت $\bar{u}_{tt} + \omega^2 \bar{u} = 0$

معادله ی مشخصه: $m^2 + \omega^2 = 0 \longrightarrow m^2 = -\omega^2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$

ریشه های مختلط

$$* \ \bar{u}(\omega, t) = A_\omega \cos \omega t + B_\omega \sin \omega t$$

$$\bar{u}(\omega, 0) = A_\omega \quad (1)$$

از طرفی: $\bar{u}(\omega, 0) = F(u(x,0)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) e^{-i\omega x} dx$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$\overset{\text{شرط صورت مسئله}}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\omega x} dx = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x} dx$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)x} \right]_{x=-\infty}^{0} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-i\omega} (e^{0} - e^{-\infty})$$

$(e^0 = 1,\ e^{-\infty} \to 0)$

① $\Rightarrow A_\omega = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-i\omega}$ ②

$$\bar{u}_t(\omega, t) = -\omega A_\omega \sin\omega t + \omega B_\omega \cos\omega t$$

$$\bar{u}_t(\omega, 0) = \omega B_\omega$$

از طرفی $\bar{u}_t(\omega, 0) = F(u_t(x, 0)) \overset{\text{شرط مسئله}}{=} F(0) = 0$

$\Rightarrow B_\omega = 0 \quad (\omega \neq 0)$

② $* \ \bar{u}(\omega, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-i\omega} \cos\omega t$

تبدیل فوریه معکوس $u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تمرین: معادله زیر را با تبدیل فوریه حل کنید:

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & |x| < 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0$$

مثال) معادله زیر را با تبدیل فوریه حل کنید:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$
$$0 < y < 1$$

$$u(x,0) = e^{-|x|} \qquad u(\pm\infty, y) = 0$$

$$u(x,1) = 0$$

$-\infty < x < +\infty$ از طرفین تبدیل فوریه ی مختلط می گیریم:

$$F(u_{xx}) + F(u_{yy}) = 0 \qquad F(u(x,y)) = \bar{u}(\omega, y)$$

$$-\omega^2 \bar{u}(\omega,y) + \bar{u}_{yy}(\omega,y) = 0 \qquad F(u_{xx}) = -\omega^2 F(u)$$

معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت $\quad \bar{u}_{yy} - \omega^2 \bar{u} = 0 \qquad F(u_{yy}) = \dfrac{\partial^2 F(u)}{\partial y^2} = \bar{u}_{yy}(\omega, y)$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

معادله‌ی مشخصه : $m^2 - w^2 = 0 \rightarrow m^2 = w^2 \rightarrow m = \pm w$

ریشه ها حقیقی اند

$$\bar{u}(w,y) = A_w e^{+wy} + B_w e^{-wy}$$

$$\bar{u}(w,0) = A_w \underbrace{e^{0}}_{1} + B_w \underbrace{e^{0}}_{1}$$

از طرفی $\bar{u}(w,0) = F(u(x,0)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-iwx}\, dx$

$$\overset{\text{شرط}}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, e^{-iwx}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-(-x)}\, e^{-iwx}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-iwx}\, dx \right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-iw)}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+iw)}\, dx \right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{1}{1-iw} \underbrace{\left[e^{(1-iw)x} \right]_{-\infty}^{0}}_{e^{0} - e^{-\infty} \to 0} + \frac{1}{-(1+iw)} \underbrace{\left[e^{-x(1+iw)} \right]_{x=0}^{\infty}}_{e^{-\infty} \to 0 \,-\, e^{0}} \right)$$

Subject
Date

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)} = \bar{u}(\omega, 0) \quad (2)$$

$$\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1+i\omega+1-i\omega}{1+\omega^2}$$

$$* \; \bar{u}(\omega, y) = A_\omega e^{+\omega y} + B_\omega e^{-\omega y}$$

$$(1) \; \bar{u}(\omega, 0) = A_\omega \underbrace{e^0}_{1} + B_\omega \underbrace{e^0}_{1}$$

$$(1), (2) \Rightarrow A_\omega + B_\omega = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)} \quad (3)$$

$$* \; \bar{u}(\omega, 1) = A_\omega e^{\omega} + B_\omega e^{-\omega}$$

از طرفی $\bar{u}(\omega, 1) = F(u(x, 1)) \xrightarrow{\text{شرط مسئله}} F(0) = 0$ $\Rightarrow$

$$(4) \; A_\omega e^{\omega} + B_\omega \cdot \frac{1}{e^{\omega}} = 0$$

$$(3), (4) \longrightarrow A_\omega = \checkmark$$

$$B_\omega = \checkmark$$

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\bar{u}(\omega, y)\, e^{+i\omega x}}\, d\omega$$

از * (با A_ω و B_ω مشخص)

Subject
Date

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی :

دیدیم که برای تابع زوج $f(x)$ ، انتگرال فوریه‌ی کسینوسی داریم :

$$f(x)=\int_0^{\infty} A_\omega \cos \omega x \, d\omega$$

که

$$A_\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)\cos \omega x}_{\text{زوج}} \, dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos \omega x \, dx$$

تعریف : تبدیل فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)$ عبارت است از :

$$F_c\big(f(x)\big)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos \omega x \, dx=\bar{f}_c(\omega)$$

(F ← فوریه ، c ← کسینوسی)

* تبدیل فوریه‌ی معکوس کسینوسی $\bar{f}_c(\omega)$:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \bar{f}_c(\omega)\cos \omega x \, d\omega$$

مثال) تبدیل فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ را بدست آورید.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$F_c\,(f(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} \cos\omega x \, dx$$

زوج

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} \cos\omega x \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\int \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{i\omega z} \, dz \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\operatorname{Res} \frac{1}{(z^2+1)^2} \cdot e^{i\omega z} \right)$$

(نقطه‌ی منفرد بالای خط حقیقی) $z = +i$

قطب مرتبه دوم تابع است $z = +i \rightarrow \operatorname{Res}_{z=+i} \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{i\omega z} = \lim_{z \to i} \left((z-i)^2 \cdot \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{i\omega z} \right)'$

$(z^2+1)^2 = (z-i)^2 (z+i)^2$

$$= \lim_{z \to i} \left(\frac{1}{(z+i)^2} e^{i\omega z} \right)' = \lim_{z \to i} \left(\frac{i\omega e^{i\omega z} (z+i)^2 - 2(z+i) e^{i\omega z}}{(z+i)^4} \right) = \ldots$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تعریف: تبدیل فوریه‌ی سینوسی تابع $f(x)$ عبارت است از:

$$\underset{\text{سینوسی}}{\overset{\text{فوریه}}{F_s}}(f(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx : \bar{f}_s(\omega)$$

* تبدیل فوریه‌ی سینوسی معکوس $\bar{f}_s(\omega)$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

تمرین: تبدیل فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x) = e^{-2x}$ ؟

تبدیل فوریه‌ی سینوسی تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

تبدیل فوریه‌ی سینوسی مشتق $(f'(x))$: (فرض می‌کنیم $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$)

$$F_s(f'(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \sin \omega x \, dx$$

$u = \sin \omega x \to du = \omega \cos \omega x \, dx$

$dv = f'(x) \, dx \to v = f(x)$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\Big[\sin \omega x \, f(x)\Big]_0^{+\infty} - \omega \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \right)$$

(عبارت داخل کروشه به 0 میل می‌کند)

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx}_{F_c(f(x))}$$

$$F_s(f'(x)) = -\omega F_c(f(x))$$

$$F_s(f''(x)) = -\omega F_c(f'(x))$$

$$\boxed{F_s(f''(x)) = -\omega^2 F_s(f(x)) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)}$$

تبدیل فوریه‌ی کسینوسی $f'(x)$: (فرض کنیم $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$)

$$F_c(f'(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f'(x)\cos\omega x\,dx$$

$$u = \cos\omega x \to du = -\omega\sin\omega x\,dx$$

$$dv = f'(x)dx \to v = f(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\underbrace{f(x)\cos\omega x\Big]_0^{+\infty}}_{-f(0)} + \omega\int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx}_{F_s(f(x))}$$

PAPCO

Subject
Date

$$F_c(f'(x)) = \omega F_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0)$$

$$F_c(f''(x)) = \underbrace{\omega F_s(f')}_{-\omega F_c(f)} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

$$\boxed{F_c(f''(x)) = -\omega^2 F_c(f(x)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)}$$

در حل معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از تبدیل فوریه

* درصورتی که $\infty > x > 0$ داده شده باشد، از طرفین معادله F_c یا F_s می‌گیریم.

$$F_c(u(x,t)) = \bar{u}_c(\omega,t)$$

(t → y)

$$F_s(u(x,t)) = \bar{u}_s(\omega,t)$$

* اگر در شرایط مسئله $u(0,t)$ داده شده باشد از طرفین معادله F_s می‌گیریم

* اگر در شرایط مسئله $u_x(0,t)$ داده شده باشد از طرفین معادله F_c می‌گیریم.

$$F_c(u_{xx}(x,t)) = -\omega^2 F_c(u(x,t)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u_x(0,t)$$

$$F_s(u_{xx}(x,t)) = -\omega^2 F_s(u(x,t)) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega . u(0,t)$$

$$F_c(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_c(u)$$

$$F_s(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_s(u)$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) امتحان ۹۵/۳/۲۷ : با تبدیل فوریه معادله را حل کنید:

$u_t = u_{xx} \quad , x>0 \quad , t>0$

$u_x(0, t) = -1$

$u(x, 0) = 0$

چون $x>0$ ، از طرفین F_s یا F_c می‌گیریم.
چون $u_x(0, t)$ داده شده، از طرفین F_c می‌گیریم.

$F_c(u_t) = F_c(u_{xx}) \qquad F_c(u(x,t)) = \bar{u}_c(\omega, t)$

$F_c(u_t) = -\omega^2 F_c(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \underbrace{u_x(0, t)}_{-1}$

$\frac{\partial}{\partial t} F_c(u) + \omega^2 F_c(u) = +\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$y' + P(x)y = Q(x)$

$\mu = e^{\int P(x)\, dx}$

$y = \frac{\int e^{\int P(x)} Q\, dx}{e^{\int P(x)}}$

$(\bar{u}_c)_t + \omega^2 \bar{u}_c = +\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

$\mu = e^{\int \omega^2 dt} = e^{\omega^2 t}$

$*\bar{u}_c(\omega, t) = \frac{\int \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2} e^{\omega^2 t} + c_1}{e^{\omega^2 t}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2} e^{\omega^2 t} + c_1}{e^{\omega^2 t}}$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2} + c_\omega e^{-\omega^2 t}$

$\bar{u}_c(\omega, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2} + c_\omega \underbrace{(e^0)}_{1}$ (۱)

PAPCO

Subject

Date

از طرفی $\bar{u}_c(\omega, 0) = F_c(u(x,0)) \overset{\text{از شرط مستقله}}{=} F_c(0) = 0$

$① \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2} + c_\omega = 0 \Rightarrow c_\omega = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2}$

$* \; \bar{u}_c(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2} (1 - e^{-\omega^2 t})$

$\Rightarrow u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2} (1 - e^{-\omega^2 t}) \cos \omega x \, d\omega$

مثال) با تبدیل فوریه معادله را حل کنید.

$u_{xx} = u_{tt} \; ; \quad x > 0 \;, \; t > 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi < x \end{cases}$$

$u_t(x,0) = 0 \;, u(0,t) = 0 \;, u(+\infty, t) = 0$

چون $x > 0$, $u(0,t)$ داده شده از طرفین معادله F_s می‌گیریم:

$F_s(u_{xx}) = F_s(u_{tt}) \qquad F_s(u(x,t)) = \bar{u}_s(\omega, t)$

$-\omega^2 F_s(u) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \omega \underbrace{u(0,t)}_{0} = F_s(u_{tt})$

$$\underbrace{-\omega^2 F_s(u)}_{\bar{u}_s(\omega,t)} = \underbrace{\frac{\partial^2 F_s(u)}{\partial t^2}}_{\frac{\partial^2 \bar{u}_s(\omega,t)}{\partial t^2}}$$

Subject
Date

معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت $(\bar{u}_s)_{tt} + \omega^2 u_s = 0$

معادله‌ی مشخصه: $m^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow m^2 = -\omega^2 \rightarrow m = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$: ریشه‌های مختلط

$$\Rightarrow \bar{u}_s(\omega, t) = A_\omega \cos \omega t + B_\omega \sin \omega t$$

$$t = 0 : \bar{u}_s(\omega, 0) = A_\omega \underbrace{\cos 0}_{1} + B_\omega \underbrace{\sin 0}_{0} = A_\omega$$

از طرفی: $\bar{u}_s(\omega, 0) = F_s(u(x,0)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(x,0) \cdot \sin \omega x \, dx$

شرط صورت مسئله $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin x \cdot \sin \omega x \, dx}$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(1-\omega)x - \cos(1+\omega)x] \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{+1}{1-\omega} \sin(1-\omega)x - \frac{+1}{1+\omega} \sin(1+\omega)x \right]_0^{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-\omega} (\underbrace{\sin(\pi - \omega\pi)}_{\sin \omega\pi} - \underbrace{\sin 0}_{0}) - \frac{1}{1+\omega} (\underbrace{\sin(\pi + \omega\pi)}_{-\sin \omega\pi} - \underbrace{\sin 0}_{0}) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \omega\pi \left(\underbrace{\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1+\omega}}_{\frac{1+\omega+1-\omega}{1-\omega^2}} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \omega\pi}{1-\omega^2} \quad (1) \longrightarrow A_\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega\pi}{1-\omega^2}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

(*): $(\bar{u}_s)_t(\omega,t) = -\omega A_\omega \sin\omega t + \omega B_\omega \cos\omega t$

$(\bar{u}_s)_t(\omega,0) = \omega B_\omega$

از طرفی $(\bar{u}_s)_t(\omega,0) = F_s(\underbrace{u_t(x,0)}_{0}) = F_s(0) = 0$ (شرط صورت مسئله) $\Rightarrow B_\omega = 0$

(*): $\bar{u}_s(\omega,t) = A_\omega \cos\omega t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2} \cos\omega t$

$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{u}_s(\omega,t) \sin\omega x \, d\omega$

مثال) امتحان بهمن ۹۴: حل با تبدیل فوریه:

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (x>0, y>0)$

$u(x,0) = e^{-x}$

$u(0,y) = e^{-y}$

$u(x,+\infty) = 0, \quad u(\infty,y) = 0$

$x>0$ و نیز $u(0,y)$ داده شده پس از طرفین F_s می‌گیریم.

$F_s(u_{xx}) + F_s(u_{yy}) = 0$

$-\omega^2 \underbrace{F_s(u)}_{\bar{u}_s} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega \underbrace{u(0,y)}_{e^{-y}} + \underbrace{F_s(u_{yy})}_{(\bar{u}_s)_{yy}} = 0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت غیرهمگن $(\bar{U}_s)_{yy} - \omega^2 \bar{U}_s = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega e^{-y}$ *

ابتدا همگن ; $(\bar{U}_s)_{yy} - \omega^2 \bar{U}_s = 0$

ریشه های حقیقی : معادله‌ی مشخصه : $m^2 - \omega^2 = 0 \rightarrow m^2 = \omega^2 \rightarrow m = \pm\omega$

$$\bar{U}_s(\omega, y) = A_\omega e^{+\omega y} + B_\omega e^{-\omega y}$$

برای غیرهمگن :

جواب خصوصی غیرهمگن $\bar{U}_{sp} = c_1 e^{-y}$ (1)

خصوصی

قرار در معادله غیرهمگن * :

$$+c_1 e^{-y} - \omega \cdot c_1 e^{-y} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega e^{-y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1 - \omega^2 c_1}_{c_1(1-\omega^2)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega \rightarrow c_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1-\omega^2}$$

$$\xrightarrow{(1)} \bar{U}_{sp} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{1-\omega^2} \cdot e^{-y}$$

$$\xrightarrow{(2)} \bar{U}_s(\omega, y) = A_\omega e^{+\omega y} + B_\omega e^{-\omega y} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{1-\omega^2} e^{-y}$$

$$\bar{U}_s(\omega, \infty) = A_\omega e^{+\infty} + B_\omega e^{-\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ldots e^{-\infty}$$

(→ 0 , → 0)

از طرفی $\bar{U}_s(\omega, \infty) = F_s(u(x, \infty)) = F_s(0) = 0$

شرط صورت مسئله

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$A_\omega = 0$

(۳) $\bar{u}_s(\omega,0) = B_\omega \underbrace{e^0}_{1} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{1-\omega^2} \underbrace{e^0}_{1}$

از طرفی $\bar{u}_s(\omega,0) = F_s(u(x,0)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \underbrace{u(x,0)}_{e^{-x}} \sin\omega x \, dx$

e^{-x} ؛ از شرط صورت مسئله

$\Rightarrow B_\omega - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1-\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, I \Rightarrow B_\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(I + \frac{\omega}{1-\omega^2} \right)$

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \sin\omega x \, dx = \underbrace{\frac{-1}{\omega} e^{-x} \cos\omega x - \frac{1}{\omega^2} e^{-x} \sin\omega x \Big]_0^{\infty}}_{+\frac{1}{\omega}} - \frac{1}{\omega^2} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x} \sin\omega x \, dx}_{I}$

e^{-x} , $\sin\omega x$

$-e^{-x}$, $\frac{-1}{\omega}\cos\omega x$ (+)

$+e^{-x}$, $\frac{-1}{\omega^2}\sin\omega x$ (−)

$\Rightarrow I\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega} \longrightarrow I = \frac{\frac{1}{\omega}}{1+\frac{1}{\omega^2}} = \frac{\omega}{\omega^2+1}$

(۴): $\bar{u}_s(\omega,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\omega}{\omega^2+1} + \frac{\omega}{1-\omega^2} \right) e^{-\omega y} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{1-\omega^2} e^{-y}$

$\Rightarrow u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \text{〃} \sin\omega x \, d\omega$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تبدیل لاپلاس :

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$$

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$$

$$L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - sF(0) - f'(0)$$

$$L[u(x,t)] = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\,dt = \bar{u}(x,s)$$

$$L[u_t(x,t)] = sL[u] - u(x,0)$$

$$L[u_{tt}(x,t)] = s^2 L[u] - su(x,0) - u_t(x,0)$$

$$L[u_x(x,t)] = \frac{\partial}{\partial x} L[u]$$

$$L[u_{xx}(x,t)] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L[u]$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) حل با تبدیل لاپلاس :

$$u_x = 2x - 2x u_t \;;\; x > 0 \,,\; t > 0$$

$$u(x,0) = u(0,t) = 1$$

$$L[u_x] = L[2x] - L[2x u_t]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} L[u] = 2x L[1] - 2x L[u_t]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} L[u] = 2x \frac{1}{s} - 2x(sL[u] - u(x,0))$$

۱ = از شرط مسئله

$$\frac{\partial}{\partial x} L[u] + 2xs L[u] = 2x\left(\frac{1}{s} + 1\right)$$

y' , y

معادله مرتبه اول خطی : $y' + 2xsy = 2x\left(\frac{1}{s} + 1\right)$

$$\mu = e^{\int 2xs\,dx} = e^{sx^2}$$

$$y = \frac{\left(\frac{1}{s}+1\right)\int e^{sx^2} \cdot 2x\,dx}{e^{sx^2}}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$y = \frac{(\frac{1}{s}+1)\int e^{sx^2}(2x \cdot \frac{s}{s})\,dx}{e^{sx^2}}$$

$$y = \frac{\frac{1}{s}(\frac{1}{s}+1)e^{sx^2} + c(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})}{e^{sx^2}}$$

$$y = (\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}) + ce^{-sx^2}(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})$$

↓

$L[u(x,t)] =$

$L[u(0,t)] = (\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})(1+c)$

از طرفی $L[u(0,t)] \overset{\text{شرط صورت مسئله}}{=} L[1] = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow c = \ldots$

$\Rightarrow u = L^{-1}L[u] = \ldots$

با آرزوی موفقیت برای همهٔ عزیزان
در درس ریاضی مهندسی
اگر بد خط است، پوزش می طلبم
اگر سؤال و مشکلی بود بنده درخدمتم ↓
@behshadnorouzi

Scanned by CamScanner